Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Sei $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen G. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Weg der Länge k von i nach j in G gibt, wenn $A^k(i,j) \neq 0$. Wie kann die Zahl $A^k(i,j)$ gedeutet werden?

Aufgabe 2
Betrachten Sie das Problem, den transitiven Abschluss G^* eines *dynamischen* gerichteten Graphen $G = (V, E)$ aufrechtzuerhalten.
Erinnerung: Der transitive Abschluss $G^* = (V, E^*)$ hat die Kantenmengee

$$E^* = \{(u,v) \in V \times V \mid \text{es existiert ein Pfad in } G \text{ von } u \text{ nach } v\}.$$

Zu Beginn ist $E = \emptyset$. In jedem Schritt wird eine Kante (u, v) zu E hinzugefügt. Anschließend soll der transitive Abschluss G^* aktualisiert werden.

(a) Zeigen Sie, wie man einen Update-Schritt in Zeit $O(|V|^2)$ durchführen kann.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Algorithmus im Worst-Case Zeit $\Omega(|V|^2)$ benötigt.

(c) Passen Sie den Algorithmus so an, dass das Einfügen von m Kanten insgesamt Zeit $O(|V|^3)$ benötigt.

Aufgabe 3
Betrachten Sie den folgenden Algorithmus, der für gegebene Matrizen $A, B, C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ probabilistisch überprüft, ob $AB = C$ gilt.

1. Wähle zufällig und gleichverteilt einen Vektor $v \in \{0,1\}^{n \times 1}$.
2. Berechne $w = A(Bv) - Cv$.
3. Wenn $w = 0$ ist, dann gebe „ja“ zurück, ansonten „nein“.

Beweisen Sie, dass im Falle $AB \neq C$ der Algorithmus mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $\frac{1}{2}$ „ja“ zurückgibt.