Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 13

Aufgabe 1
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit dem charakteristischen Polynom $\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}$, dass $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$ die mit Vielfachheiten gezählten Eigenwerte von A^m sind.

(b) Die *Spur* $\operatorname{tr}(A)$ einer quadratischen Matrix A ist die Summe ihrer Diagonaleinträge. Zeigen Sie $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

(c) Folgern Sie aus (b), dass $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie den folgenden Satz ohne Beweis.
Satz. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ mit den jeweiligen Vielfachheiten $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$.

(ii) Es existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass $J = S^{-1}AS$ eine Blockdiagonalmatrix von der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$$

ist.

Aufgabe 2
Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $p(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ ein Nicht-Nullpolynom. Wie viele Lösungen $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ kann die Gleichung

$$p(x_1, \dots, x_n) = 0$$

haben, wenn

(a) $\deg(p) \leq |\mathbb{F}|$?

(b) $\deg(p) > |\mathbb{F}|$?

Aufgabe 3
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Sei $T = (T_{u,v})_{1 \leq u,v \leq n}$ die Matrix definiert durch

$$T_{u,v} = \begin{cases} x_{u,v} & \text{falls } \{u, v\} \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Angenommen G sei bipartit. Zeigen Sie, dass G genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $\det(T) \neq 0$.

(b) Stimmt (a) auch, falls G nicht bipartit ist?