Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Logik I
WS 2016/17

Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Überführen Sie die folgenden Formeln in KNF und DNF:

(a) $(A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C)$

(b) $(B \rightarrow \neg A) \wedge ((A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow (A \vee C))$

(c) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$

Aufgabe 2
Zu jeder aussagenlogischen Formel existieren äquivalente Formeln in konjunktiver und disjunktiver Normalform, die jedoch exponentiell größer als die Ausgangsformel sein können. Die *Länge* einer Formel F in DNF ist die Anzahl der Konjunktionsterme in F.
Die Formeln F_n sind durch die folgende rekursive Definition gegeben:

$$F_1 = \neg A_1, \quad F_{n+1} = F_n \leftrightarrow \neg A_{n+1}$$

(a) Die Formel F_n enthält nur Negation und den Äquivalenzoperator. Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Assoziativitätseigenschaft von $\leftrightarrow$:

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

(b) Geben Sie F_4 und alle Modelle von F_4 an.

(c) Wieviele Modelle hat F_n? (mit Beweis)

(d) Zeigen Sie, dass jede zu F_n äquivalente Formel in DNF mindestens Länge 2^{n-1} hat.

Aufgabe 3
Für zwei Belegungen $B_1 : \{A_1 \dots A_n\} \rightarrow \{0,1\}$ und $B_2 : \{A_1 \dots A_n\} \rightarrow \{0,1\}$ definieren wir eine Belegung $\min(B_1, B_2)$ wie folgt für $i = 1, \dots, n$:

$$\min(B_1, B_2)(A_i) = \min(B_1(A_i), B_2(A_i))$$

Sei F eine Hornformel und B sowie B' Modelle von F. Zeigen Sie, dass dann auch $\min(B, B')$ ein Modell von F ist. Gilt die Aussage auch für die Belegung $\max(B, B')$ mit

$$\max(B, B')(A_i) = \max(B(A_i), B'(A_i)) \text{ ?}$$