

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Wenn $F_1, \dots, F_k \models F$ gilt, dann gilt auch $F_i \models F$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$.
2. Jede Formel, die nur aus atomaren Formeln, \vee und \wedge aufgebaut ist, ist erfüllbar.
3. Zu jeder Formel existiert eine äquivalente Formel, die nur aus atomaren Formeln und dem Operator NAND besteht:

A	B	$\text{NAND}(A, B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4. Gilt für beliebige Formeln F_1, F_2 und eine atomare Formel A die folgende Aussage?

$$(F_1 \vee A) \wedge (F_2 \vee \neg A) \equiv F_1 \vee F_2$$

Wenn nicht, gilt eine der Implikationsrichtungen?

5. Sei F eine Formel in KNF. Angenommen $|\text{Res}^i(F)| = k$, dann gilt

$$k \leq |\text{Res}^{i+1}(F)| \leq k + k^2.$$

6. Sei M eine Formelmenge. Dann ist M genau dann erfüllbar, wenn jede Formel $F \in M$ erfüllbar ist.
7. Sei M eine Formelmenge. Ist M unerfüllbar, so ist jede endliche Teilmenge von M unerfüllbar.
8. Sei M eine unendliche Formelmenge. Ist M unerfüllbar, so existiert eine Formel $F \in M$, so dass auch $M \setminus \{F\}$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie mit dem Resolutionsverfahren, ob die folgenden Klauselmengen erfüllbar sind.

- (a) $\{\{A, B, C\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A, C\}\}$

(b) $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C\}, \{\neg A, C, D\}, \{\neg D\}, \{B, D\}\}$

(c) $\{\{A, C\}, \{B\}, \{\neg C\}, \{A, \neg B, D\}, \{A, \neg C, \neg D\}\}$

Aufgabe 3

Sei \mathcal{B} eine Belegung und A eine atomare Formel. Dann ist

$$\mathcal{B}_A(X) = \begin{cases} \mathcal{B}(X) & \text{falls } X \neq A \\ 1 - \mathcal{B}(X) & \text{falls } X = A. \end{cases}$$

Eine Formel F heißt *unabhängig* von einer atomaren Formel A , wenn für jedes Modell \mathcal{B} von F auch \mathcal{B}_A ein Modell von F ist.

(a) Zeigen Sie, dass F genau dann unabhängig von A ist, wenn eine zu F äquivalente Formel G existiert, die A nicht enthält.

(b) Zeigen Sie, dass F genau dann unabhängig von allen atomaren Formeln ist, wenn F gültig oder unerfüllbar ist.