Übungsblatt 10

Aufgabe 1
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Es gilt $\forall x F \to \forall x G \equiv \forall x(F \to G)$.

(b) Jede prädikatenlogische Formel ohne $\neg$ ist erfüllbar.

(c) Jede Formel F ist erfüllbarkeitsäquivalent zu $\exists x F$.

(d) Es gilt $\forall x F \equiv \exists x F$ genau dann, wenn x nicht frei in F vorkommt.

Aufgabe 2
Eine Formel F *trennt* Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls F in genau einer der beiden Strukturen erfüllt ist. Geben Sie für alle Paare $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ mit $i \neq j$ jeweils eine trennende Formel an.

(a) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_1})$, $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{Z}, I_{\mathcal{A}_2})$, $\mathcal{A}_3 = (\mathbb{Q}, I_{\mathcal{A}_3})$, wobei R ein zweistelliges Relationssymbol ist und $R^{\mathcal{A}_i}$ die natürliche Ordnung auf $U_{\mathcal{A}_i}$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ ist.

(b) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_1})$, $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{Z}, I_{\mathcal{A}_2})$, $\mathcal{A}_3 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_3})$, wobei f ein zweistelliges Funktionssymbol ist und $f^{\mathcal{A}_i}$ die natürliche Multiplikation auf $U_{\mathcal{A}_i}$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ ist.

Aufgabe 3
Gegeben sei die folgende Formel

$$F = \exists x\Big(\big(\exists y R(x, y)\big) \to \exists r R(r, f(y, z))\Big) \land \forall x \neg \exists z \big(P(z) \land \forall w R(x, w)\big).$$

(a) Berechnen Sie eine Formel G in BPF, die zu F äquivalent ist.

(b) Berechnen Sie eine Skolemform von G.