Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.

(b) Jede Formel ist äquivalent zu ihrer Skolemform.

(c) Es gibt unendlich viele paarweise nicht äquivalente Formeln (über einer festen Menge von Prädikaten- und Funktionssymbolen).

Aufgabe 2
Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$F = P(a) \wedge \forall x \Big(\neg P(x) \vee \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x))) \big) \Big)$$

(a) Geben Sie das Herbrand-Universum $D(\mathcal{F})$ an, wobei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionssymbole in der Formel F ist.

(b) Geben Sie ein Herbrand-Modell $\mathcal{A}$ für F an. Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ in einfachen Worten.

Betrachten Sie die Struktur $\mathcal{A} = (A, I_\mathcal{A})$ mit

- A ist die Menge aller Punkte und Geraden im $\mathbb{R}^2$.
- $P^\mathcal{A} = \{x \mid x \text{ ist ein Punkt.}\}$
- $G^\mathcal{A} = \{x \mid x \text{ ist eine Gerade.}\}$
- ${S_1}^\mathcal{A} = \{(x, y) \mid x \text{ ist ein Punkt auf der Geraden } y.\}$
- ${S_2}^\mathcal{A} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind parallele Geraden.}\}$
- ${S_3}^\mathcal{A} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind orthogonale Geraden.}\}$
- ${S_4}^\mathcal{A} = \{(x, y, z) \mid x \text{ ist der Spiegelpunkt von } y \text{ bezüglich der Geraden } z.\}$

Aufgabe 3
Formulieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik die folgenden Aussagen (mit freien Variablen) in dieser Struktur:

(a) Der Punkt x ist der einzige Schnittpunkt der Geraden y und z.

(b) Der Punkt x ist Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten y und z.

(c) Die Geraden x, y und z schließen ein (rechtwinkliges) Dreieck ein.

(d) Die Geraden x, y und z schließen ein gleichschenkliges Dreieck ein.

Aufgabe 4
Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln gelten in dieser Struktur?

(a) $\forall x \forall y \forall z((S_3(x,y) \wedge S_3(x,z)) \rightarrow S_2(y,z))$

(b) $\forall x \forall y((P(x) \wedge G(y)) \rightarrow \exists z(S_1(x,z) \wedge S_2(y,z)))$

(c) $\forall w \forall x \forall y((P(w) \wedge P(x) \wedge G(y)) \rightarrow \exists z(S_1(z,y) \wedge S_4(x,z,y)))$

(d) $\forall w \forall x \forall y \forall z((S_4(w,x,y) \wedge S_3(y,z)) \rightarrow (S_1(w,z) \leftrightarrow S_1(x,z)))$