Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 14

Aufgabe 1
Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgenden Literalmengen an. Geben Sie für unifizierbare Mengen einen allgemeinsten Unifikator an.

(a) $\{P(f(x), g(f(y))), P(f(g(z)), g(w))\}$

(b) $\{P(x, f(x)), P(f(y), y)\}$

(c) $\{P(f(x), g(x)), P(y, g(f(z))), P(w, g(x))\}$

(d) $\{P(x), P(f(y)), P(g(z))\}$

Aufgabe 2
Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein einstelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{A}_1 = (\{0, 1\}, I_{\mathcal{A}_1})$, wobei $f^{\mathcal{A}_1}(x, y) = x \vee y$, $R^{\mathcal{A}_1} = \emptyset$
- $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_2})$, wobei $f^{\mathcal{A}_2}(x, y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{A}_2} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$
- $\mathcal{A}_3 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_3})$, wobei $f^{\mathcal{A}_3}(x, y) = x - 2y$, $R^{\mathcal{A}_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $\forall x(R(x) \vee R(f(x, x)))$

(b) $\forall x \exists y R(f(x, y))$

(c) $\forall x \neg R(f(x, x))$

(d) $\forall x \forall y(f(x, y) = f(y, x))$

(e) $\forall x \forall y(f(x, y) = x \vee f(x, y) = y)$

(f) $\exists x(\neg R(x) \wedge f(x, x) = x)$

Aufgabe 3
Beweisen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar aber nicht gültig sind.

(a) $\exists x \forall y(f(f(y)) = x)$

(b) $\forall x R(g(x)) \wedge \exists x \neg R(x)$

(c) $\exists x \exists y (P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$

(d) $(y = z) \wedge \exists x (P(x) \to \neg P(g(x)))$

(e) $P(a) \wedge \forall x (P(x) \to \neg P(g(x))$

(f) $\exists x \forall y (f(x, f(x,y)) = f(x,y))$

(g) $\forall x \forall y (R(x,y) \leftrightarrow f(x) = y)$

(h) $\forall x \exists y (f(x,y) = x \wedge f(x,x) \neq x)$

(i) $\forall x \big(f(g(f(x))) \neq g(f(g(x))) \big)$

(j) $R(x) \wedge Q(y) \wedge \forall x (\neg R(x) \vee \neg Q(x))$

Aufgabe 4
Gegeben ist die folgende Formel

$$F = \exists x P(x) \wedge \forall y \neg \big(P(y) \wedge \forall z \neg R(z) \big) \wedge \neg \exists x R(x).$$

(a) Überführen Sie F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel G in Skolemform.

(b) Geben Sie das Herbrand-Universum über der Menge aller Funktionssymbole in G an.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Grundresolution, dass G unerfüllbar ist. Es genügt die Klauseln der Herbrand-Expansion zu notieren, die Sie in der Grundresolution benutzen.