

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus, der für gegebene Matrizen $A, B, C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ probabilistisch überprüft, ob $AB = C$ gilt.

1. Wähle zufällig und gleichverteilt einen Vektor $v \in \{0, 1\}^{n \times 1}$.
2. Berechne $w = A(Bv) - Cv$.
3. Wenn $w = 0$ ist, dann gebe „ja“ zurück, ansonsten „nein“.

Beweisen Sie, dass im Falle $AB \neq C$ der Algorithmus mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $\frac{1}{2}$ „ja“ zurückgibt.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den optimalen Suchbaum mit 7 Knoten bei folgenden gegebenen Gewichten mit Hilfe von Knuth's $O(n^2)$ Algorithmus:

- (a) $\gamma(1) = 1, \gamma(2) = 2, \gamma(3) = 3, \gamma(4) = 4, \gamma(5) = 5, \gamma(6) = 6, \gamma(7) = 7$
- (b) $\gamma(1) = 3, \gamma(2) = 3, \gamma(3) = 1, \gamma(4) = 7, \gamma(5) = 6, \gamma(6) = 2, \gamma(7) = 5$
- (c) $\gamma(1) = 4, \gamma(2) = 0, \gamma(3) = 1, \gamma(4) = 4, \gamma(5) = 5, \gamma(6) = 7, \gamma(7) = 3$

Aufgabe 3

Seien $Z = (z_1, \dots, z_m)$ und $Y = (y_1, \dots, y_n)$ Folgen. Nenne Z *Teilfolge* von Y , wenn Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ existieren, so dass für alle $1 \leq j \leq m$ gilt $z_j = y_{i_j}$.

Lösen Sie das folgende Problem effizient mit dynamischer Programmierung: Gegeben zwei Folgen X, Y , was ist die maximale Länge einer Folge Z , die Teilfolge von X und Y ist?

Aufgabe 4

Alice und Bob haben jeweils Zugriff auf einen n -stelligen Bitvektor, d.h. Alice bekommt $x \in \{0, 1\}^n$ und Bob $y \in \{0, 1\}^n$. Alice und Bob kennen den Bitvektor des jeweils anderen nicht. Allerdings teilen beide einen gleichverteilten Zufallsvektor $z \in \{0, 1\}^n$. Die Aufgabe besteht darin, dass Alice an Bob genau ein Bit sendet, woraufhin Bob sagen soll ob $x = y$. Für beliebige x, y soll dabei folgendes gelten: Falls $x = y$, dann soll Bob das mit Wahrscheinlichkeit 1 herausfinden. Falls $x \neq y$, dann soll Bob mit Wahrscheinlichkeit $\leq 1/2$ falsch liegen. (Alice und Bob ist es erlaubt sich bevor Sie ihre Vektoren sehen auf eine gemeinsame Strategie festzulegen.)