

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.
- Jede Formel ist äquivalent zu ihrer Skolemform.
- Es gibt unendlich viele paarweise nicht äquivalente Formeln (über einer festen Menge von Prädikaten- und Funktionssymbolen).

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$F = P(a) \wedge \forall x \left(\neg P(x) \vee (\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))) \right)$$

- Geben Sie das Herbrand-Universum $D(\mathcal{F})$ an, wobei \mathcal{F} die Menge aller Funktionssymbole in der Formel F ist.
- Geben Sie ein Herbrand-Modell \mathcal{A} für F an. Beschreiben Sie \mathcal{A} in einfachen Worten.

Betrachten Sie die Struktur $\mathcal{A} = (A, I_{\mathcal{A}})$ mit

- A ist die Menge aller Punkte und Geraden im \mathbb{R}^2 .
- $P^{\mathcal{A}} = \{x \mid x \text{ ist ein Punkt.}\}$
- $G^{\mathcal{A}} = \{x \mid x \text{ ist eine Gerade.}\}$
- $S_1^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ ist ein Punkt auf der Geraden } y.\}$
- $S_2^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind parallele Geraden.}\}$
- $S_3^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind orthogonale Geraden.}\}$
- $S_4^{\mathcal{A}} = \{(x, y, z) \mid x \text{ ist der Spiegelpunkt von } y \text{ bezüglich der Geraden } z.\}$

Aufgabe 3

Formulieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik die folgenden Aussagen (mit freien Variablen) in dieser Struktur:

- (a) Der Punkt x ist der einzige Schnittpunkt der Geraden y und z .
- (b) Der Punkt x ist Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten y und z .
- (c) Die Geraden x , y und z schließen ein (rechtwinkliges) Dreieck ein.
- (d) Die Geraden x , y und z schließen ein gleichschenkliges Dreieck ein.

Aufgabe 4

Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln gelten in dieser Struktur?

- (a) $\forall x \forall y \forall z ((S_3(x, y) \wedge S_3(x, z)) \rightarrow S_2(y, z))$
- (b) $\forall x \forall y ((P(x) \wedge G(y)) \rightarrow \exists z (S_1(x, z) \wedge S_2(y, z)))$
- (c) $\forall w \forall x \forall y ((P(w) \wedge P(x) \wedge G(y)) \rightarrow \exists z (S_1(z, y) \wedge S_4(x, z, y)))$
- (d) $\forall w \forall x \forall y \forall z ((S_4(w, x, y) \wedge S_3(y, z)) \rightarrow (S_1(w, z) \leftrightarrow S_1(x, z)))$