Blatt 2

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die *Vandermonde*-Matrix

$$V(a_0,\dots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

genau dann invertierbar ist, wenn die Zahlen $a_0,\dots,a_{n-1}$ paarweise verschieden sind. Beweisen Sie dazu, dass

$$\det V(a_0,\dots,a_{n-1}) = \prod_{0\le i<j<n} (a_j - a_i).$$

Aufgabe 2 (Schnelle Fouriertransformation)

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der FFT die diskrete Fouriertransformation für das Polynom $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ über $\mathbb{C}$.

(b) Berechnen Sie $(x+2)\cdot(2x-1)$ mit Hilfe der FFT.

Aufgabe 3
Seien $A, B \subseteq \{1,\dots,10n\}$ Mengen mit $|A| = |B| = n$. Wir möchten die Menge

$$C := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

und die Anzahlen berechnen, wie oft ein Element $c \in C$ als Summe von Elementen aus A und B darstellbar ist. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n)$ an, der das Problem löst.