Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Wahr oder falsch?

(a) Wenn eine Sprache L entscheidbar ist, dann ist auch $\overline{L}$ entscheidbar.

(b) Jede reguläre Sprache ist entscheidbar.

(c) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar. Dann ist $f \circ g$ berechenbar.

(d) Die Rückrichtung in (c) gilt.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen $\mathcal{P}$ und die Menge der Quadratzahlen $\mathcal{Q}$ entscheidbar sind. Geben Sie zudem ein WHILE-Programm an, welches die halbe charakteristische Funktion $\chi'_{\mathcal{Q}}$ berechnet.

Aufgabe 3
Ein bekanntes Problem aus der Mathematik ist Hilberts zehntes Problem: Gegeben ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten in n Variablen ($n \geq 1$ beliebig), existieren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ mit $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$? Erst 1970 wurde bewiesen, dass dieses Problem unentscheidbar ist.

(a) Ist Hilberts zehntes Problem semi-entscheidbar?

(b) Ist das Komplement semi-entscheidbar?

Aufgabe 4
Wir haben in FSA gesehen, dass Typ-0-Sprachen, also semi-entscheidbare Sprachen, unter Homomorphismenbildung abgeschlossen sind. Zur Erinnerung: Ein (Monoid-)Homomorphismus ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ mit $h(uv) = h(u)h(v)$ und $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Zeigen Sie, dass auch entscheidbare Sprachen unter Homomorphismenbildung abgeschlossen sind, d.h. wenn L entscheidbar ist, dann auch $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

Aufgabe 5
Der ebenso geniale wie unberechenbare Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta ist unentschlossen. Ein neuer Held ist in Siegen aufgetaucht. Theorie-Man streift durch Siegen und bekämpft das Verbrechen. Doktor Meta weiß nicht, wo Theorie-Man seine Basis hat. Das Rennmotorrad von Theorie-Man, eine *Turing 3000*, hat keine Höchstgeschwindigkeit. Doktor Meta möchte Theorie-Man stellen. Er weiß aber nicht, wie er ihn finden kann.

Zur Vereinfachung des Problems überlegt er sich eine Abstraktion. Er modelliert den Ort von Theorie-Man als natürliche Zahl auf einem eindimensionalen Zahlenstrahl. Die Zeit diskretisiert er ebenfalls als natürliche Zahl. Dann kann er mit einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ den Aufenthaltsort von Theorie-Man beschreiben. Er sucht nun ein System, mit dem er garantiert irgendwann zur richtigen Zeit am richtigen Ort ist.
Gegeben sei eine Funktion $f(t) = v \cdot t + s_0$. Die Parameter $v \in \mathbb{N}$ und $s_0 \in \mathbb{N}$ sind unbekannt, aber fest.
Beschreiben Sie einen Algorithmus, der eine Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen ausgibt, so dass ein $j \in \mathbb{N}$ mit $s_j = f(j)$ existiert (der Algorithmus muss nicht terminieren, er muss nur irgendwann ein korrektes Folgenglied ausgeben).