

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Für zwei Sprachen $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$ sei die markierte Vereinigung $A \oplus B$ definiert durch

$$A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen für beliebige Sprachen $A, B, C \subseteq \{0, 1\}^*$:

- (a) Es gelten $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.
- (b) $A \oplus B$ ist genau dann entscheidbar, wenn A und B entscheidbar sind.
- (c) $A \oplus B$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn A und B semi-entscheidbar sind.
- (d) Es gilt genau dann $A \oplus B \leq C$, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$ gelten.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Sprache

$$EQ = \{u\#v \mid L(M_u) = L(M_v)\}.$$

Zeigen Sie, dass weder EQ noch \overline{EQ} semi-entscheidbar sind mit Hilfe des Halteproblems.

Aufgaben zum Postschen Korrespondenzproblem

Die Wortpaare, die als Eingabe für das Postsche Korrespondenzproblem (PCP) benötigt werden, wollen wir im Folgenden als Matrix darstellen und bezeichnen diese als *PCP-Instanz*. Beispiel: $I = ((01, 10), (1, 11), (000, 1))$ stellen wir dar als

$$\begin{pmatrix} 01 & 1 & 000 \\ 10 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) Entscheiden Sie die beiden folgenden PCP-Instanzen:

$$\begin{pmatrix} a & ba & abb & bab \\ ab & ab & bb & abb \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} aaaa & aa \\ aaa & aaaaa \end{pmatrix}$$

Geben Sie im positiven Fall eine PCP-Lösung an und beweisen Sie im negativen Fall, dass keine PCP-Lösung existiert.

- (b) Zeigen Sie, dass $\text{PCP}_{m,1}$ entscheidbar ist, also PCP eingeschränkt auf unäre Alphabete.
- (c) Überlegen Sie sich weitere Spezialfälle bzw. Einschränkungen, wo PCP entscheidbar ist. Denken Sie vor allem an Fälle, wo man leicht sieht, dass es *keine* Lösung gibt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^* entscheidbar ist:

Gegeben: Eine PCP-Instanz $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix}$.

Frage: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_m und j_1, \dots, j_n mit $m, n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie PCP^* auf das Schnittproblem für reguläre Sprachen.