

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie die Erfüllbarkeit der folgenden Formeln bzw. Formelmengen:

(a) $(A \vee B \vee \neg A)$

(b) $(A \wedge B \wedge \neg A)$

(c) $\{(\bigvee_{i=1}^n (\bigwedge_{j=1}^n L_{i,j})) \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $L_{i,j} = \begin{cases} A_j, & \text{wenn } i = j, \\ \neg A_j, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln F, G, H :

(a) Wenn $(F \vee G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

(b) Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

(c) Wenn $(F \rightarrow G)$ gültig ist, dann gilt $F \models G$.

(d) Wenn $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar ist, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ auch gültig.

(e) Wenn $(F \wedge G)$ unerfüllbar ist, dann ist F unerfüllbar oder G unerfüllbar.

(f) Wenn $(F \vee G)$ gültig ist, dann ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

(g) Wenn F und G gültig sind, dann gilt $F \equiv G$.

(h) Wenn F und G erfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

(i) Wenn F und G unerfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

(j) Wenn F erfüllbar und G gültig ist, dann gilt $F \equiv G$ oder $\neg F$ ist erfüllbar.

(k) Wenn $F \equiv G$ gilt, dann müssen F und G dieselben atomaren Formeln enthalten.

Aufgabe 3

Zeigen Sie folgende Aussagen für beliebige Formeln F, G :

- (a) $F \models G$ genau dann, wenn $(F \rightarrow G)$ gültig ist.
- (b) $F \equiv G$ genau dann, wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist.
- (c) $F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$.
- (d) $F \equiv \neg\neg F$
- (e) $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$
- (f) Wenn F gültig ist, dann gilt $(F \vee G) \equiv F$.

Aufgabe 4

Seien F_1, F_2 und F_3 Formeln mit folgenden Wahrheitstafeln:

A	B	C	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Geben Sie $\text{DNF}(F_i)$ und $\text{KNF}(F_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ an. Verwenden Sie hierzu die Definition von Folie 253.

Aufgabe 5

- (a) Sei $F = ((\neg A \rightarrow B) \vee \neg(A \vee \neg C))$. Formen Sie F in KNF um, indem Sie die Regeln auf Folie 258 verwenden.
- (b) Was müssen Sie an den Regeln auf Folie 258 ändern, damit eine zu F äquivalente DNF konstruiert wird?