Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Berechenbarkeit und Logik
WS 2023/24

Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Sei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol; außerdem sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Wobei handelt es sich um prädikatenlogische Formeln?

(a) $\exists x \neg P(x)$

(b) $\forall x \forall y (R(x,y) \to f(R(x,y)))$

(c) $f(x) = f(x)$

(d) $\forall n \exists p \exists q\, n = p \cdot q$

(e) $\exists x \forall y (P(y) \vee \neg \forall x R(x, f(x)))$

(f) $P(x)$

(g) $f(f(x))$

Aufgabe 2
Gegeben sei folgende Formel

$$F = ((Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee \forall x R(x, z, g(x)))$$

(a) Geben Sie alle Teilformeln und Terme an, die in F vorkommen.

(b) Welche der Teilformeln sind Aussagen?

(c) Geben Sie für jede Variable an, ob sie frei oder gebunden in F vorkommt.

(d) Geben Sie die Matrix von F an.

Aufgabe 3
Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, wobei $U_\mathcal{A}$ die Menge aller Menschen ist und $I_\mathcal{A}$ die folgende Interpretation ist:

- $W^\mathcal{A}(x)$: x ist weiblich
- $K^\mathcal{A}(x,y)$: x kennt y

- $v^{\mathcal{A}}(x) = y$: y ist biologischer Vater von x

- $m^{\mathcal{A}}(x) = y$: y ist biologischer Mutter von x

- $a^{\mathcal{A}}$ ist Adam, $e^{\mathcal{A}}$ ist Eva

Was bedeuten die folgenden prädikatenlogischen Formeln?

(a) $\forall x W(m(x))$

(b) $(v(x) = a \wedge K(x, e))$

(c) $\exists x (W(x) \wedge K(a, x))$

(d) $\neg \exists x \forall y (W(y) \to K(x, y))$

(e) $\forall x \neg (\exists y\, v(y) = x \wedge \exists y\, m(y) = x)$

(f) $\exists x \exists y (K(x, y) \wedge \neg K(y, x))$

Aufgabe 4
Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x, y) = x$, $R^{\mathcal{C}} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x, y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{N}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x, y) = x \cap y$, $R^{\mathcal{P}} = \{(x, y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $F_a = \exists x \forall y R(y, x)$

(b) $F_b = \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$

(c) $F_c = \forall x \forall y \forall z \forall w ((R(x, y) \wedge R(z, w)) \to R(f(x, z), f(y, w)))$

Aufgabe 5
Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}), I_{\mathcal{N}})$ die Struktur mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ und der Gleichheit $=$, welche alle die übliche Bedeutung haben sollen, also $I_{\mathcal{N}}(+)(x, y) = x + y$ und $I_{\mathcal{N}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_{\mathcal{N}}(=) = \{(x, x) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

(a) x ist ungerade.

(b) $x < y$.

(c) y ist Vielfaches von x.

(d) x ist gleich 1.

(e) $x \bmod y = z$.

(f) Es gibt keine größte natürliche Zahl.

(g) x ist eine Primzahl.