

Übungsblatt 13

Aufgabe 1

Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$

(b) $F_b = \forall x (R(x, y) \wedge f(x) = y)$

(c) $F_c = (\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x, y)) \wedge \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge \neg R(a, b))$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a := \forall y \exists x f(x) = y$

(b) $F_b := \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

(c) $F_c := (\exists y \forall x f(x) = g(x, y) \wedge \exists x f(x) \neq g(x, x))$

Aufgabe 3

Zeigen Sie folgende Behauptungen für beliebige Formeln F und G :

(a) $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F \wedge \exists x G)$

(b) $\forall x (F \rightarrow G) \models (\forall x F \rightarrow \forall x G)$

(c) $(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$

(d) $(\exists x F \wedge \exists x G) \not\equiv \exists x (F \wedge G)$

Aufgabe 4

Geben Sie für die folgende Formel zunächst eine zu ihr äquivalente BPF an. Überführen Sie diese anschließend in Skolemform.

$$F = \left(\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow \exists r R(r, f(y, z))) \wedge \forall x \neg \exists z (P(z) \wedge \forall w R(x, w)) \right)$$

Aufgabe 5

Überführen Sie die folgenden Formeln jeweils in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform, indem Sie wie auf Folie 348 beschrieben vorgehen:

(a) $F_a = (\forall y (\forall x R(x) \rightarrow Q(y, z)) \wedge \forall x P(x))$

(b) $F_b = \forall z (\exists y \neg (R(y) \vee \forall x R(x)) \vee \forall x Q(z, w))$