Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt zum Klausurtraining (Logik)

Aufgabe 1
Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(B \wedge B \to A) \wedge (1 \to C) \wedge (D \to E) \wedge (1 \to D) \wedge (C \to B) \wedge (A \to 0)$$

Aufgabe 2
Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{A\}, \{\neg D, C\}, \{C, \neg A\}, \{D, \neg D\}, \{\neg A, D\}, \{\neg D, \neg C, \neg A\}\}$$

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ eine Struktur, wobei das Universum gegeben ist als $U_{\mathcal{A}} = \{a, b\}^*$ und die Interpretationsfunktion definiert ist durch

- $f^{\mathcal{A}}(x, y) = xy$ (die Konkatenation von Wörtern),
- $P^{\mathcal{A}} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält genau ein } a\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade }\}$
- $c^{\mathcal{A}} = aba$

und „=“ wie üblich ein 2-stelliges Prädikatensymbol darstellt, das mit der Gleichheit interpretiert wird. Formulieren Sie die folgenden Sätze als prädikatenlogische Formeln:

(a) Das Wort aba hat ungerade Länge.

(b) Es gibt ein Wort, das genau ein a enthält und gerade Länge hat.

(c) Das Wort aba enthält genau zwei a.

(d) x ist ein Teilstring von y.

(e) Jede Kontatenation zweier Wörter gerader Länge ergibt ein Wort gerader Länge.

(f) x ist das leere Wort.

Aufgabe 4
Betrachten Sie die Struktur $\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ ist die Menge aller Punkte und Geraden im $\mathbb{R}^2$.
- ${S_1}^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ ist ein Punkt auf der Geraden } y.\}$
- ${S_2}^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind parallele Geraden.}\}$
- ${S_3}^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind orthogonale Geraden.}\}$
- ${S_4}^{\mathcal{A}} = \{(x, y, z) \mid x \text{ ist der Spiegelpunkt von } y \text{ bezüglich der Geraden } z.\}$

Formulieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik die folgenden Aussagen (mit freien Variablen) in dieser Struktur:

(a) Der Punkt x ist der einzige Schnittpunkt der Geraden y und z.

(b) Die Geraden x, y und z schließen ein Dreieck ein.

(c) Der Punkt x ist Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten y und z.

Aufgabe 5
Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = (\exists x P(f(x, g(x))) \wedge \forall x \neg P(f(x, x)))$

(b) $F_b = (\exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y))$

(c) $F_c = (\forall y \exists x f(x) = y \wedge \exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y)))$

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a := (\forall x P(f(x, x)) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(f(x, y))))$

(b) $F_b := (\forall x (P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \neg Q(y, y) \wedge \forall x (x \neq y \rightarrow \neg P(x)))$

Aufgabe 7
Zeigen Sie folgende Behauptungen für beliebige Formeln F und G.

(a) $(\exists x F \vee \forall x G) \models \exists x (F \vee G)$

(b) $(\forall x F \wedge \forall x G) \models \forall x (F \wedge G)$

(c) $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$

(d) $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$

(e) $\forall x \exists y F \not\equiv \exists x \forall y F$

Aufgabe 8
Geben Sie für die folgende Formel zunächst eine zu ihr äquivalente BPF an. Überführen Sie diese anschließend in Skolemform.

$$G = \Big(\forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)\big) \\ \wedge \forall x \neg R(x,x) \wedge \exists x \forall y (x \neq y \to R(y,x)) \wedge \forall x \exists y R(y,x)\Big)$$

Aufgabe 9
Wandeln Sie die folgende Formel F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform (Skolemform mit Matrix in KNF) um. Geben Sie dazu Zwischenschritte (BPF und Skolemform) an.

$$F = (\forall x P(x) \vee \forall y (P(x) \wedge \neg \forall x Q(x,y)))$$

Aufgaben zur Unifikation (für Logik 1, nicht für BUL!)

Aufgabe 10
Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgenden Literalmengen an.

(a) $L_a = \{P(f(x), g(f(y))), P(f(g(z)), g(w))\}$

(b) $L_b = \{P(x, f(x)), P(f(y), y)\}$

(c) $L_c = \{P(f(x), g(x)), P(y, g(f(z))), P(w, g(x))\}$

(d) $L_d = \{P(x), P(f(y)), P(g(z))\}$