Übungsblatt 1

Aufgabe 1
Wahr oder falsch?

(a) Es gibt überabzählbar unendlich viele Wörter über einem endlichen Alphabet.

(b) Es gibt abzählbar unendlich viele berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

(c) Es gibt überabzählbar unendlich viele Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Lösung

(a) falsch

Es gibt abzählbar unendlich viele Wörter über einem endlichen Alphabet. Eine mögliche Abzählung aller Wörter ergäbe sich z.B. aus der längen-lexikographischen Ordnung, bei der zuerst nach Länge und bei gleicher Länge alphabetisch sortiert wird.

(b) wahr

Siehe Folien 7 / 8 der Vorlesung.

Es gibt höchstens abzählbar viele Maschinen / Programme, die eine Funktion der Form $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnen.

Dies lässt sich auf Funktionen der Form $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ verallgemeinern.

(c) wahr

Siehe Folie 8 der Vorlesung: Schon die Menge $\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ ist überabzählbar.

Für Funktionen der Form $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gilt dies also erst recht.

Mit der gleichen Technik wie in der Vorlesung können wir auch einen formalen Beweis dafür führen:

Angenommen $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}\}$, die Menge alle Funktionen der Form $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, ist abzählbar.

Dann gibt es eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$.

Wir konstruieren eine Funktion $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit

$$g(x_1, \ldots, x_k) = f_{x_1}(x_1, \ldots, x_k) + 1$$

wobei $f_{x_1} = F(x_1)$.

Da F bijektiv (und somit surjektiv) ist, muss es ein $i \in \mathbb{N}$ geben mit $F(i) = g$.

Für dieses i gilt also $g(i, x_2, \dots, x_k) = f_i(i, x_2, \dots, x_k)$.

Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition von g mit

$$g(i, x_2, \dots, x_k) = f_i(i, x_2, \dots, x_k) + 1.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Sigma \cup \{\Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_2\})$ mit $Q = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ und folgenden Transitionen:

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, 0) &= (z_0, 0, R) \\
\delta(z_0, 1) &= (z_0, 1, R) \\
\delta(z_0, \Box) &= (z_1, 0, L) \\
\delta(z_1, 0) &= (z_1, 0, L) \\
\delta(z_1, 1) &= (z_1, 1, L) \\
\delta(z_1, \Box) &= (z_2, \Box, R)
\end{aligned}$$

(a) Untersuchen Sie, wie sich die Turingmaschine auf den Eingaben 10, 11 und 110 verhält. Was tut sie allgemein bei Eingaben $w \in 1\{0, 1\}^* \cup \{0\}$?

(b) Wie verändert sich das Verhalten, wenn man die Transition $\delta(z_0, \Box) = (z_1, 0, L)$ durch $\delta(z_0, \Box) = (z_1, 1, L)$ ersetzt?

(c) Ändern Sie die Turingmaschine M so ab, dass sie die Funktion $f(n) = 4n+1$ berechnet.

Lösung(a) Bei beliebigen Eingaben $w \in \Sigma^*$ läuft die Turingmaschine bis zum Ende der Eingabe, ersetzt das erste Blanksymbol durch eine 0 und läuft dann wieder zum linken Ende der Eingabe zurück.

Aus der Eingabe 10 wird so 100, aus 11 wird 110 und aus 110 wird 1100.

Eingaben der Form $w \in 1\{0, 1\}^* \cup \{0\}$ können als binär kodierte Zahlen verstanden werden.

Kodiert die Eingabe die Zahl n, so steht nach dem Durchlauf der Turingmaschine die Binärkodierung von $2n$ auf dem Band, da das Anfügen einer 0 an eine Zahl im Binärsystem der Multiplikation der Zahl mit 2 entspricht.

(b) Mit der Änderung wird am Bandende eine 1 statt einer 0 angefügt.

Interpretieren wir die Eingabe wieder als eine binär kodierte Zahl n, so steht nach dem Durchlauf die Binärkodierung von $2n + 1$ auf dem Band.

(c) Die Turingmaschine muss 01 an die Binärdarstellung des Eingabewortes anhängen. Somit modifizieren wir M wie folgt:

$M' = (Q', \Sigma, \Sigma \cup \{\square\}, \delta, z_0, \square, \{z_2\})$ mit $Q' = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ und folgende Transitionen:

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, 0) &= (z_0, 0, R)\\
\delta(z_0, 1) &= (z_0, 1, R)\\
\delta(z_0, \square) &= (z_1, 0, R)\\
\delta(z_1, \square) &= (z_3, 1, L)\\
\delta(z_3, 0) &= (z_3, 0, L)\\
\delta(z_3, 1) &= (z_3, 1, L)\\
\delta(z_3, \square) &= (z_2, \square, R)
\end{aligned}$$

Für eine deterministische Maschine müssten formal noch $\delta(z_1, a) = (z_1, a, N)$ ($a \in \{0, 1\}$) hinzugefügt werden. Zur Vereinfachung lassen wir das weg.

Aufgabe 3

Geben Sie eine 2-Band-Turingmaschine an, die bei Eingabe $w \in \{a, b\}^*$ das Wort ww auf das erste Band schreibt, den Lesekopf auf das erste Zeichen von ww bewegt und in einen Endzustand übergeht.

Lösung

Im Gegensatz zu einer 1-Band Konstruktion, ist eine 2-Band TM deutlich weniger aufwendig (Übung: Was ist die Idee bei einer 1-Band TM?). Die Idee ist, dass wir w von Band 1 auf Band 2 kopieren, mit dem Lesekopf auf Band 1 stehen bleiben, während wir auf Band 2 wieder an den Anfang fahren und zum Schluss die Kopie von w von Band 2 auf Band 1 hinter die Eingabe anhängen. Wir können ab diesem Zeitpunkt das zweite Band ignorieren und auf Band 1 an den Start zurücklaufen.

Formal sähe die eben beschriebene 2-Band TM wie folgt aus:

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$
- $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_e\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$

Hierbei ist δ gegeben durch

- $\delta(z_0, (x, \Box)) = (z_0, (x, x), (R, R))$ für alle $x \in \{a, b\}$
- $\delta(z_0, (\Box, \Box) = (z_1, (\Box, \Box), (N, L))$
- $\delta(z_1, (\Box, x)) = (z_1, (\Box, x), (N, L))$ für alle $x \in \{a, b\}$
- $\delta(z_1, (\Box, \Box) = (z_2, (\Box, \Box), (N, R))$
- $\delta(z_2, (\Box, x)) = (z_2, (x, x), (R, R))$ für alle $x \in \{a, b\}$
- $\delta(z_2, (\Box, \Box) = (z_3, (\Box, \Box), (L, N))$
- $\delta(z_3, (x, \Box)) = (z_3, (x, \Box), (L, N))$ für alle $x \in \{a, b\}$
- $\delta(z_3, (\Box, \Box) = (z_e, (\Box, \Box), (R, N))$

Auch hier müssten für nicht erreichbare Paare $(z, \gamma) \in Z \times \Gamma^2$ eigentlich auch Übergänge definiert werden, wenn wir eine deterministische TM erhalten wollen.

Aufgabe 4
Geben Sie (formal) Turingmaschinen M_1 bzw. M_2 an, die die Funktionen $f_i : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$f_i(n_1, n_2) = n_i \quad (i = 1, 2)$$

berechnen.

Lösung

Zu Beginn steht $\text{bin}(n_1)\#\text{bin}(n_2)\#$ auf dem Band. Nach einem Durchlauf der TM für $f_i, i \in \{1, 2\}$ soll nur noch $\text{bin}(n_i)$ auf dem Band stehen.

<u>Beachte</u>: Der Lesekopf der TM muss nach dem Durchlauf auf dem ersten Symbol von $\text{bin}(n_1)$ bzw. $\text{bin}(n_2)$ stehen.

TM für f_1

- $M_1 = (Z_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, z_0, \Box, \{z_e\})$
- $Z_1 = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_e\}$
- $\Sigma_1 = \{0, 1, \#\}$
- $\Gamma_1 = \Sigma \cup \{\Box\}$

Dabei ist δ_1 wie folgt definiert:

z_0: Überspringen von $\text{bin}(n_1)$

- $\delta_1(z_0, x) = (z_0, x, R)$ für alle $x \in \{0, 1\}$
- $\delta_1(z_0, \#) = (z_1, \#, R)$

Wir durchlaufen das Band von links nach rechts, bis wir auf ein # treffen. Dann gehen wir in z_1 über, um den restlichen Bandinhalt zu löschen.

z_1: Löschen des restlichen Bandinhaltes

- $\delta_1(z_1, x) = (z_1, \square, R)$ für alle $x \in \{0, 1, \#\}$
- $\delta_1(z_1, \square) = (z_2, \square, L)$

Alle Symbole von $\text{bin}(n_2)\#$ werden mit $\square$ überschrieben. Wenn das rechte Bandende erreicht ist, gehen wir in z_2 über, um zurück zum linken Bandende zu laufen.

z_2, z_3: Zurück zum linken Bandende

- $\delta_1(z_2, \square) = (z_2, \square, L)$
- $\delta_1(z_2, \#) = (z_3, \square, L)$
- $\delta_1(z_3, x) = (z_3, x, L)$ für alle $x \in \{0, 1\}$
- $\delta_1(z_3, \square) = (z_e, \square, R)$

Hier brauchen wir zwei Zustände, da die $\square$'s rechts und links von $\text{bin}(n_1)$ unterschiedlich behandelt werden.

Das mittlere # haben wir zu Beginn mit z_0 stehen gelassen um diesen Übergang zu markieren.

TM für f_2

- $M_2 = (Z_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \delta_2, z_0, \square, \{z_e\})$
- $Z_2 = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$
- $\Sigma_2 = \{0, 1, \#\}$
- $\Gamma_2 = \Sigma_2 \cup \{\square\}$

Dabei ist δ_2 wie folgt definiert:

z_0: Löschen von $\mathrm{bin}(n_1)$

- $\delta_2(z_0, x) = (z_0, \Box, R)$ für alle $x \in \{0, 1\}$
- $\delta_2(z_0, \#) = (z_1, \Box, R)$

z_1: Löschen des letzten #

- $\delta_2(z_1, x) = (z_1, x, R)$ für alle $x \in \{0, 1\}$
- $\delta_2(z_1, \#) = (z_2, \Box, L)$

z_2: Zurück zum Anfang von $\mathrm{bin}(n_2)$

- $\delta_2(z_2, x) = (z_2, x, L)$ für alle $x \in \{0, 1\}$
- $\delta_2(z_2, \Box) = (z_e, \Box, R)$