Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

(a) Es gibt unendlich viele Funktionen f, so dass μf primitiv rekursiv ist.

(b) Es gibt eine WHILE-berechenbare Funktion f, die total ist, aber für die μf nicht LOOP-berechenbar ist.

(c) Für jede nicht totale Funktion f ist μf ebenfalls nicht total.

(d) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ ($k \geq 1$) eine (Turing-)berechenbare Funktion. Für jedes k-Tupel $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ sei $f_{\bar{x}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale, surjektive Funktion, wobei $f_{\bar{x}}$ definiert ist durch $f_{\bar{x}}(n) = f(n, x_1, \ldots, x_k)$. Dann ist μf total.

Lösung

(a) Ja. Sei $f_i(n, x) = n - i \cdot x$, $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $f_i(0, x) = 0 - i \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$, also ist $n = 0$ die kleinste Nullstelle. Wir erhalten $(\mu f_i)(x) = 0$.

(b) Ja: Zum Beispiel ist die Funktion definiert durch $f(n, x) = x+n+1$ LOOP-berechenbar und damit insbesondere WHILE-berechenbar. Aber: $(\mu f)(x)$ ist überall undefiniert, also nicht LOOP-berechenbar.

(c) Falsch. Die Funktion

$$f(n, x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nicht total, aber es gilt $(\mu f)(x) = 0$.

(d) Wahr: Da $f_{\bar{x}}$ surjektiv ist, gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $f_{\bar{x}}(n) = 0$. Außerdem sind alle Werte $f_{\bar{x}}(i)$ für $i < n$ definiert, weil $f_{\bar{x}}$ total ist. Somit ist für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, \bar{x}) = 0 \text{ und } \forall m < n : f(m, \bar{x}) \text{ ist definiert}\}$$

nicht-leer, sprich $(\mu f)(\bar{x})$ ist definiert, also ist μf total.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie μf für die folgenden Funktionen.

(a) $f(n, x) = n + x$

(b) $f(n, x) = x - n$

(c) $f(n, x, y) = x - n \cdot y$

(d) $f(n, x, y, z) = 5^x + y - z^5 \cdot n$

(e) $f(n, x, y, z) = (y - 5n^2) + (x + z) \cdot n$

(f) $f(n, x, y) = \max(2n, x, y) - n$

Lösung
Offensichtlich sind alle Funktionen in dieser Aufgabe total, d.h. es genügt, die erste Nullstelle zu finden.

(a) $(\mu f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$

Für $x = 0$ erhalten wir mit Hilfe von $n = 0$ eine Nullstelle. Falls $x > 0$ ist, so hat $f(n, x)$ keine Nullstellen, da wir nur natürliche Zahlen betrachten.

(b) $(\mu f)(x) = x$, denn für alle $n, x \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n, x) = 0$ genau dann, wenn $n \geq x$. D.h. für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x) = 0\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\} = x.$$

(c) Sei zunächst $y \neq 0$. Dann ist $(\mu f)(x, y) = \lceil x/y \rceil$, denn

$$\begin{aligned} \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x, y) = 0\} &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x - n \cdot y = 0\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot y \geq x\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x/y\} \\ &= \lceil x/y \rceil. \end{aligned}$$

Mit Betrachtung des Falls $y = 0$ erhalten wir insgesamt

$$(\mu f)(x, y) = \begin{cases} \lceil x/y \rceil & \text{falls } y \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = y = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d) Ähnliche Überlegungen wie bei (c) liefern

$$(\mu f)(x, y, z) = \begin{cases} \left\lceil \frac{5^x + y}{z^5} \right\rceil, & \text{falls } z > 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Allerdings ist 5^x stets größer als 0, weswegen nur 2 Fälle auftreten können.

(e) Ist $y = 0$, so ist $n = 0$ die kleinste Nullstelle. Für $y > 0$ ist dies jedoch nicht möglich. Dann kommt es darauf an, ob $(x + z) > 0$ ist oder nicht. Da nämlich $y > 0$ wegen des ersten Teils $n > 0$ impliziert, bedeutet $(x + z) > 0$, dass der zweite Teil größer ist als 0, also $(\mu f)(x, y, z)$ undefiniert ist.

$$(\mu f)(x,y,z) = \begin{cases} \text{undefiniert,} & \text{falls } y > 0 \text{ und } (x > 0 \text{ oder } z > 0), \\ 0, & \text{falls } y = 0, \\ \lceil \sqrt{\frac{y}{5}} \rceil & \text{sonst, d.h. } x = z = 0. \end{cases}$$

(f) Falls $x > 0$ oder $y > 0$ ist, so ist $(\mu f)(x, y)$ undefiniert. O.B.d.A. sei $x \geq y$, dann ist $\max(2n, x, y) \geq x$, jedoch muss dann $n \geq x$ sein, damit n eine Nullstelle von f ist. Dies ist jedoch nicht möglich, da dann $\max(2n, x, y) = 2n$ ist und es gilt stets $2n - n = n \geq x > 0$. Für $x = y = 0$ wiederum ist $n = 0$ die kleinste Nullstelle. Somit gilt

$$(\mu f)(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0, \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass folgende Funktionen μ-rekursiv sind:

(a) $f(x, y) = \lceil \log_y(x) \rceil, y \geq 2$ (hierbei sei $\log_y(0) = 0$)

(b) $g(x,y) = \begin{cases} y & \text{wenn } x = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung

(a) Idee: Probiere alle Potenzen von y durch und schaue, welche als erste größer oder gleich x wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \lceil \log_y(x) \rceil &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \log_y(x)\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid y^n \geq x\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x - y^n \leq 0\}. \end{aligned}$$

Die Umformung $n \geq \log_y(x) \Rightarrow y^n \geq x$ stimmt nur für $y \geq 2$, aber dies ist laut Aufgabenstellung gegeben. Sei nun $h\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert als $h(n, x, y) = x - y^n$. Dann gilt $f = \mu h$. Außerdem ist h μ-rekursiv (sogar primitiv rekursiv, siehe Blatt 3).

(b) Sei $k(n, x, y) = (y - n) + x$. Behauptung: Es gilt $g = \mu k$. Es gilt

$$\mu k(0, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y - n) + 0 = 0\} = y = g(0, y).$$

Außerdem gilt für alle $x > 0$, dass

$$\mu k(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y - n) + x = 0\} = \min \emptyset = \text{undef.} = g(x, y),$$

weil die Subtraktion (in diesem Fall $y - n$) in unserem Kontext immer bei 0 abgeschnitten ist. Von daher ist $(y - n) + x > 0$ für $x > 0$. Und: k ist primitiv rekursiv.