Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Berechenbarkeit und Logik
WS 2023/24

Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Wahr oder falsch?

(a) Wenn eine Sprache L entscheidbar ist, dann ist auch $\overline{L}$ entscheidbar.

(b) Jede reguläre Sprache ist entscheidbar.

(c) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar. Dann ist $f \circ g$ berechenbar.

(d) Die Rückrichtung in (c) gilt.

Lösung

(a) Wahr. Die charakteristische Funktion χ_L kann in $\chi_{\overline{L}}$ umgewandelt werden, indem 1 und 0 getauscht werden. Bei einer Turingmaschine für L muss man also für jeden Input w einfach den Output 1 und 0 vertauschen.

(b) Wahr. Für reguläre Sprachen kann das Wortproblem einfach durch einen DFA entschieden werden.

(c) Wahr. Wenn man f durch T_1 und g durch T_2 berechnet, kann man $f \circ g$ berechnen, indem man erst T_1 laufen lässt und dann den Output als neuen Input auf T_2 laufen lässt. Beachte: Wenn $g(n)$ nicht definiert ist, so läuft die Turingmaschine für g in eine Endlosschleife und $f(g(n))$ ist ebenfalls undefiniert.

(d) Falsch. Man nehme z.B. eine totale, aber nicht berechenbare Funktion g (z.B. Busy-Beaver) und f definiert durch $f(n) = 0$. Dann ist $f \circ g$ ebenfalls die Nullfunktion und somit berechenbar. Alternative zu Busy-Beaver: χ_L für L unentscheidbar (z.B. Hilberts 10. Problem, siehe Aufgabe 3). Allerdings muss χ_L dafür in eine Funktion $\chi_L^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ umgewandelt werden. Das geht jedoch, da Σ^* abzählbar ist.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen $\mathcal{P}$ und die Menge der Quadratzahlen $\mathcal{Q}$ entscheidbar sind. Geben Sie zudem ein WHILE-Programm an, welches die halbe charakteristische Funktion $\chi'_{\mathcal{Q}}$ berechnet.

Lösung
Der erste Teil lässt sich lösen, indem man beispielsweise ein LOOP-Programm angibt, welches die Ausgabe 1 oder 0 erzeugt, je nachdem, ob die Eingabe (also x_1) eine Primzahl (beziehungsweise eine Quadratzahl) ist.

Quadratzahl:

$$
\begin{array}{l}
x_2 := x_1; \\
x_1 := 0; \\
x_3 := 0; \\
\textsc{Loop}\ x_2\ \textsc{Do} \\
\quad x_4 := x_3 \cdot x_3; \\
\quad x_3 := x_3 + 1; \\
\quad x_5 := x_4 - x_2; \\
\quad x_6 := x_2 - x_4; \\
\quad x_7 := x_5 + x_6; \\
\quad \textsc{If}\ x_7 = 0\ \textsc{Then}\ x_1 := 1\ \textsc{End} \\
\textsc{End}
\end{array}
$$

Hierbei sind x_5, x_6, x_7 Hilfsvariablen, um $x_4 = x_2$ zu simulieren.
Primzahl:

$$
\begin{array}{l}
x_2 := x_1; \\
x_3 := x_1 - 2; \\
x_4 := 1; \\
x_1 := 1; \\
\textsc{Loop}\ x_3\ \textsc{Do} \\
\quad x_4 := x_4 + 1; \\
\quad x_5 := x_2 \mod x_4; \\
\quad \textsc{If}\ x_5 = 0\ \textsc{Then}\ x_1 := 0\ \textsc{End} \\
\textsc{End}; \\
x_6 := x_2 - 1; \\
\textsc{If}\ x_6 = 0\ \textsc{Then}\ x_1 := 0\ \textsc{End}
\end{array}
$$

Die Funktion mod haben wir bereits auf Blatt 2 simuliert. Das Programm testet, ob der Input x_1 durch $2, \ldots, x_1 - 1$ teilbar ist. Für die Sonderfälle $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$ wurde noch eine weitere Abfrage eingefügt.
Das WHILE-Programm für die halbe charakteristische Funktion χ'_Q bekommen wir beispielsweise aus dem 1. Teil wie folgt: Sei Q das LOOP-Programm für χ_Q. Dann erhalten

wir χ'_Q durch

$$\begin{aligned}&Q;\\ &x_8 := 0;\\ &\textsc{If } x_1 = 0 \textsc{ Then } x_8 := 1 \textsc{ End};\\ &\textsc{While } x_8 \neq 0 \textsc{ Do } x_8 := 1 \textsc{ End}\end{aligned}$$

Aufgabe 3
Ein bekanntes Problem aus der Mathematik ist Hilberts zehntes Problem: Gegeben ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten in n Variablen ($n \geq 1$ beliebig), existieren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ mit $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$? Erst 1970 wurde bewiesen, dass dieses Problem unentscheidbar ist.

(a) Ist Hilberts zehntes Problem semi-entscheidbar?

(b) Ist das Komplement semi-entscheidbar?

Lösung

(a) Wahr. Die Menge der möglichen Belegungen für ein Polynom über $\mathbb{Z}$ mit n Variablen ist $\mathbb{Z}^n$, welches eine abzählbar unendliche Menge darstellt.[1] Das bedeutet, dass man alle möglichen Belegungen sukzessive durchprobieren kann. Das Verfahren terminiert, wenn es eine Belegung gibt, die das Polynom zu Null auswertet. Ansonsten läuft das Programm für immer weiter. Dies beschreibt also einen Semi-Entscheidungs-Algorithmus.

(b) Falsch. Aus a) und der Unentscheidbarkeit des Problems folgt, dass b) nicht semi-entscheidbar ist (Satz 17, Folie 115).

Aufgabe 4
Wir haben in FSA gesehen, dass Typ-0-Sprachen, also semi-entscheidbare Sprachen, unter Homomorphismenbildung abgeschlossen sind. Zur Erinnerung: Ein (Monoid-)Homomorphismus ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ mit $h(uv) = h(u)h(v)$ und $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Zeigen Sie, dass auch entscheidbare Sprachen unter Homomorphismenbildung abgeschlossen sind, d.h. wenn L entscheidbar ist, dann auch $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

Lösung
Sei L eine entscheidbare Sprache und M eine Turingmaschine, die L entscheidet (also die charakteristische Funktion χ_L berechnet). Dann können wir wie folgt eine nichtdeterministische Turingmaschine M' für $h(L)$ bzw. $\chi_{h(L)}$ erhalten:
Sei $w \in \Gamma^*$ ein Eingabewort. Die NTM M' rät eine Zerlegung $w = w_1 \cdots w_n$ von w mit $w_i = h(a_i)$, wobei $a_i \in \Sigma$ ist. Das Wort $v = a_1 \cdots a_n$ wird jetzt auf ein weiteres Band kopiert (es geht natürlich auch auf einem Band, aber so ist es einfacher). Man beachte also, dass

[1] Der Beweis ist analog zur Konstruktion der Funktion $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ auf Folie 62, welches eine Bijektion von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ ist.

das Bandalphabet von M' mindestens die Zeichen aus Σ zusätzlich enthalten muss. Jetzt geht der Leseschreibkopf auf das erste Zeichen von v. Auf dem Hilfsband wird v genauso behandelt wie M es tun würde, d.h. M wird auf dem Hilfsband simuliert. Das bedeutet, wir haben es so definiert, dass M' genau dann terminiert, wenn M terminiert und w wird genau dann akzeptiert, wenn v von M akzeptiert wird. Sonderfall: $h^{-1}(w) = \emptyset$, dann kann nichts aufs Hilfsband kopiert werden und wir erhalten $\chi_{h(L)}(w) = 0$. Somit berechnet M' tatsächlich $\chi_{h(L)}$ und wir haben gezeigt, dass $h(L)$ entscheidbar ist.

Aufgabe 5

Der ebenso geniale wie unberechenbare Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta ist unentschlossen. Ein neuer Held ist in Siegen aufgetaucht. Theorie-Man streift durch Siegen und bekämpft das Verbrechen. Doktor Meta weiß nicht, wo Theorie-Man seine Basis hat. Das Rennmotorrad von Theorie-Man, eine *Turing 3000*, hat keine Höchstgeschwindigkeit. Doktor Meta möchte Theorie-Man stellen. Er weiß aber nicht, wie er ihn finden kann. Zur Vereinfachung des Problems überlegt er sich eine Abstraktion. Er modelliert den Ort von Theorie-Man als natürliche Zahl auf einem eindimensionalen Zahlenstrahl. Die Zeit diskretisiert er ebenfalls als natürliche Zahl. Dann kann er mit einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ den Aufenthaltsort von Theorie-Man beschreiben. Er sucht nun ein System, mit dem er garantiert irgendwann zur richtigen Zeit am richtigen Ort ist.
Gegeben sei eine Funktion $f(t) = v \cdot t + s_0$. Die Parameter $v \in \mathbb{N}$ und $s_0 \in \mathbb{N}$ sind unbekannt, aber fest.
Beschreiben Sie einen Algorithmus, der eine Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen ausgibt, so dass ein $j \in \mathbb{N}$ mit $s_j = f(j)$ existiert (der Algorithmus muss nicht terminieren, er muss nur irgendwann ein korrektes Folgenglied ausgeben).

Lösung

$\mathbb{N}^2$ ist abzählbar unendlich (siehe Folie 62). Folglich existiert eine Bijektion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ (die Umkehrfunktion der Funktion c auf Folie 62). Sei $g(j) = (j_1, j_2)$, dann definieren wir $s_j = j_1 \cdot j + j_2$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Nun existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $s_j = f(j)$ nämlich $j = g^{-1}(v, s_0)$, da in diesem Fall $s_j = v \cdot j + s_0 = f(j)$ gilt. Die Funktion g (und somit auch $j \mapsto s_j$) ist eine totale berechenbare Funktion, also gibt es ein Programm, welches $s_1, s_2, \ldots$ ausgibt und auf Grund der obigen Rechnung gilt auch für beliebige v, s_0, dass ein j existiert so, dass $s_j = f(j)$.