Übungsblatt 9

Aufgabe 1
Zeichnen Sie jeweils den Syntaxbaum zu folgenden Formeln F. Berechnen Sie anschließend jeweils den Wert $\mathcal{B}(F)$ für die gegebenen Formeln F und Belegungen $\mathcal{B}$.

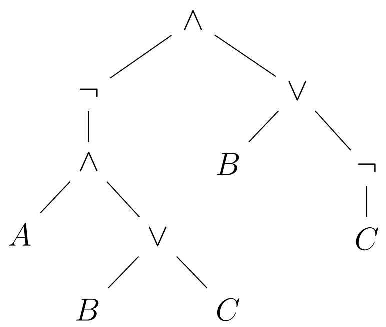
(a) $F = (\neg(A \wedge (B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C))$ $\quad \mathcal{B}\colon A \mapsto 1,\ B \mapsto 0,\ C \mapsto 0$

(b) $F = ((\neg B \wedge \neg C) \leftrightarrow ((A \to \neg B) \to C))$ $\quad \mathcal{B}\colon A \mapsto 1,\ B \mapsto 0,\ C \mapsto 1$

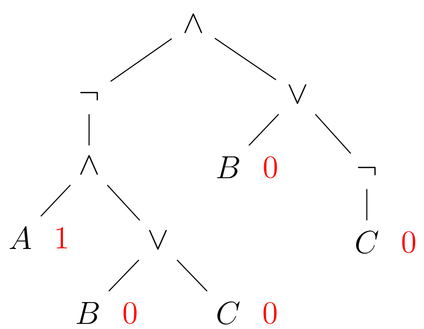
(c) $F = ((A \vee (B \leftrightarrow \neg C)) \to \neg(A \vee B))$ $\quad \mathcal{B}\colon A \mapsto 0,\ B \mapsto 1,\ C \mapsto 1$

Lösung
Die erste Teilaufgabe wird ausführlich beschrieben. Die weiteren zwei kürzen wir ab und zeigen nur das Endergebnis.

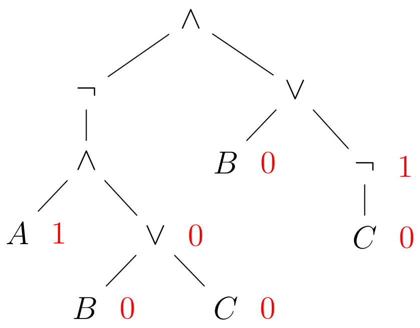
(a) Der Syntaxbaum für F ist:



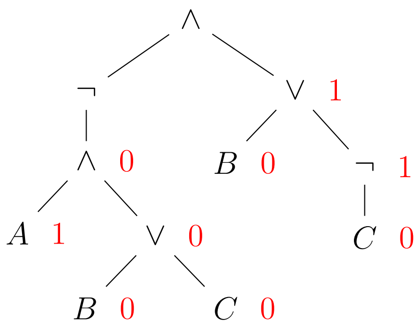
Wir beschriften diesen nun bottom-up mit den Werten für die jeweiligen Teilformeln. Für die Blätter verwenden wir die Werte von $\mathcal{B}$:

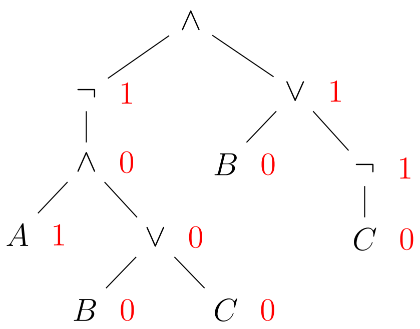


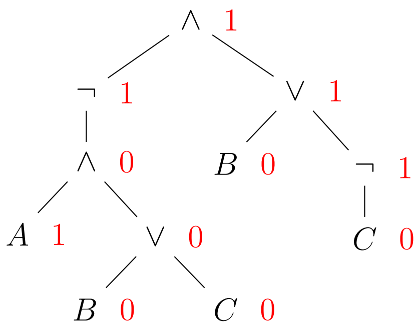
Wir können in jedem weiteren Schritt alle Knoten beschriften, deren Kinder beschriftet sind. Im nächsten Schritt erhalten wir also:



Die weiteren Schritte sind

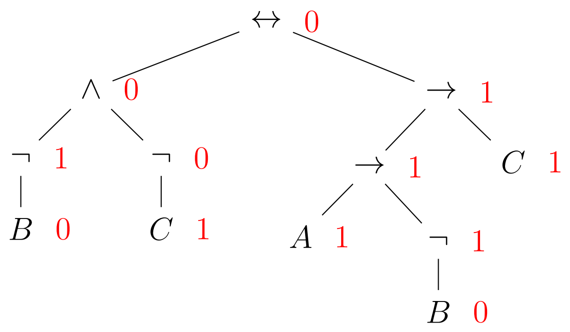




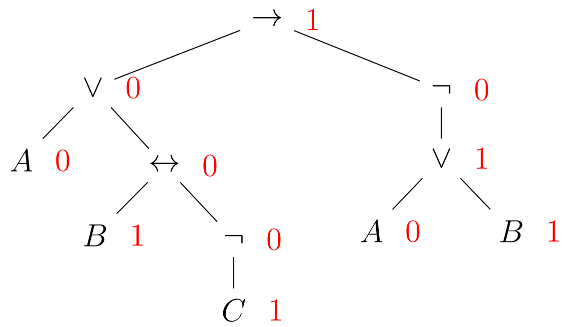


Der Wert ist also $\mathcal{B}(F) = 1$.

(b) Es gilt $\mathcal{B}(F) = 0$, denn:



(c) Es gilt $\mathcal{B}(F) = 1$, denn:



Aufgabe 2
Ein Gerät besitzt vier Lämpchen $L_1, \ldots, L_4$, die entweder grün oder rot leuchten können. Das Gerät arbeitet korrekt, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. L_1 leuchtet grün.
2. Wenn L_1 oder L_2 grün leuchtet, dann leuchtet auch L_4 grün.
3. Mindestens eins der Lämpchen leuchtet rot.
4. L_3 leuchtet rot, wenn L_1 und L_2 in verschiedenen Farben leuchten.

Formalisieren Sie die Spezifikation des Gerätes durch eine aussagenlogische Formel. Geben Sie die gesamte Wahrheitstafel für Ihre Formel an. Ist die Formel erfüllbar?

Lösung

Jede Lampe $L_1, \ldots, L_4$ sehen wir als atomare Formel an. Dabei soll $\mathcal{B}(L_i) = 1$ bedeuten, dass Lampe i grün leuchtet, bzw. $\mathcal{B}(L_i) = 0$, dass Lampe i rot leuchtet. Wir erhalten also folgende Formeln $F_1, \ldots, F_4$, wobei die gesamte Formel dann $F = (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4)$ ist:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= L_1 \\
F_2 &= ((L_1 \vee L_2) \rightarrow L_4) \\
F_3 &= (\neg L_1 \vee \neg L_2 \vee \neg L_3 \vee \neg L_4) \\
F_4 &= (\neg(L_1 \leftrightarrow L_2) \rightarrow \neg L_3)
\end{aligned}
$$

Wahrheitstafel für F:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Diese Tabelle kann man erhalten, indem man einfach für jede der 16 Belegungen den Wert für F ausrechnet. Ein besseres Vorgehen ist hier wie folgt: Da $F = (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4)$, schauen wir, in welchen Fällen sich F_1, F_2, F_3 und F_4 einzeln zu 0 auswerten. Denn es gilt, dass $\mathcal{B}(F) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B}(F_1) = 0$ oder $\mathcal{B}(F_2) = 0$ oder $\mathcal{B}(F_3) = 0$ oder $\mathcal{B}(F_4) = 0$. Wir beginnen mit F_1 und tragen überall, wo $\mathcal{B}(L_1) = 0$ gilt, eine 0 ein. Dies ist die obere Hälfte der Tabelle, die wir im Weiteren ignorieren werden. Wir müssen also noch folgende Tabelle ausfüllen:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

Es gilt $\mathcal{B}(F_2) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B}(L_1 \vee L_2) = 1$ und $\mathcal{B}(L_4) = 0$. Wegen $\mathcal{B}(L_1) = 1$ ist also $\mathcal{B}(F_2) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B}(L_4) = 0$. Damit erhalten wir:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	

$\mathcal{B}(F_3) = 0$ gilt nur für die Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(L_i) = 1$ für alle $1 \leq i \leq 4$. Wir erhalten also:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Es gilt $\mathcal{B}(F_4) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B}(L_3) = 1$ und $\mathcal{B}(L_1) \neq \mathcal{B}(L_2)$. Bei den restlichen drei Einträgen gilt dies nur für die Belegung $\mathcal{B}$: $L_1 \to 1$, $L_2 \to 0$, $L_3 \to 1$, $L_4 \to 1$. Somit erhalten wir:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

In den übrigen zwei Fällen muss sich die Formel also zu 1 auswerten.
Die Formel ist erfüllbar, weil es Belegungen gibt, unter denen sich die Formel zu 1 auswertet.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie jeweils $\widehat{\mathcal{B}}$ für die folgenden abkürzenden Formeln:

(a) $(F_1 \to F_2)$

Lösung
$(F_1 \to F_2)$ ist eine Abkürzung für $(\neg F_1 \vee F_2)$. Wir erhalten also

$$\widehat{\mathcal{B}}(F_1 \to F_2) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \widehat{\mathcal{B}}(F_1) = 1 \text{ und } \widehat{\mathcal{B}}(F_2) = 0, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) $(F_1 \leftrightarrow F_2)$

Lösung
$(F_1 \leftrightarrow F_2)$ ist eine Abkürzung für $((F_1 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2))$. Wir erhalten also

$$\widehat{\mathcal{B}}(F_1 \leftrightarrow F_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \widehat{\mathcal{B}}(F_1) = \widehat{\mathcal{B}}(F_2), \\ 0, & \text{falls } \widehat{\mathcal{B}}(F_1) \neq \widehat{\mathcal{B}}(F_2). \end{cases}$$