Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 10

Aufgabe 1
Beweisen oder widerlegen Sie die Erfüllbarkeit der folgenden Formeln bzw. Formelmengen:

(a) $(A \vee B \vee \neg A)$

Lösung
Die Formel ist erfüllbar. Z.B. gilt für $\mathcal{B}(A) = 1$ und $\mathcal{B}(B) = 1$, dass $\mathcal{B} \models (A \vee B \vee \neg A)$.

(b) $(A \wedge B \wedge \neg A)$

Lösung
Die Formel ist nicht erfüllbar: Sei $\mathcal{B}$ eine zu der Formel passende Belegung. Wenn $\mathcal{B}(A) = 0$, dann gilt $\mathcal{B} \not\models (A \wedge B \wedge \neg A)$. Wenn $\mathcal{B}(A) = 1$, dann gilt $\mathcal{B} \not\models \neg A$ und somit $\mathcal{B} \not\models (A \wedge B \wedge \neg A)$.

(c) $\{(\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{n} L_{i,j})) \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $L_{i,j} = \begin{cases} A_j, & \text{wenn } i = j, \\ \neg A_j, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$

Lösung
Die Formelmenge ist erfüllbar mit der Belegung $\mathcal{B}(A_1) = 1$ und $\mathcal{B}(A_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq 2$. Dies ist auch die einzige Belegung, die die Formelmenge erfüllt.

Um auf diese Belegung zu kommen, gehen wir wie folgt vor: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $F_n = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} L_{i,j}$ die n'te Formel in der Formelmenge. Wir wollen uns davon überzeugen, dass $\mathcal{B} \models F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt.

Für $n = 1$ ist die Formel $F_1 = A_1$. Wegen $\mathcal{B}(A_1) = 1$ gilt also $\mathcal{B} \models F_1$. Mit $\mathcal{B}(A_1) = 0$ würde hingegen $\mathcal{B} \not\models F_1$ gelten.

Für $n = 2$ ist die Formel $F_2 = ((A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2))$. Wegen $\mathcal{B}(A_1) = 1$ und $\mathcal{B}(A_2) = 0$ erhalten wir $\mathcal{B} \models (A_1 \wedge \neg A_2)$, also gilt auch $\mathcal{B} \models F_2$. Mit $\mathcal{B}(A_2) = 1$ würde $\mathcal{B} \not\models F_2$ gelten wegen $\mathcal{B} \not\models (\neg A_1 \wedge A_2)$ und $\mathcal{B} \not\models (A_1 \wedge \neg A_2)$.

Für $n = 3$ haben wir die Formel

$$\begin{aligned} F_3 = \; & ((A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\ & \vee(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \\ & \vee(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)). \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{B}(A_1) = 1$ und $\mathcal{B}(A_2) = \mathcal{B}(A_3) = 0$ erhalten wir, dass $\mathcal{B} \models (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$, und somit $\mathcal{B} \models F_3$. Analog zu vorher würde mit $\mathcal{B}(A_3) = 1$ wieder $\mathcal{B} \not\models F_3$ gelten.

Die Argumentation für A_n mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ ist analog. Wegen $\mathcal{B}(A_1) = 1$ und $\mathcal{B}(A_2) = \cdots = \mathcal{B}(A_n) = 0$ gilt $\mathcal{B} \models (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \cdots \wedge \neg A_n)$, also $\mathcal{B} \models F_n$.

Aufgabe 2
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln F, G, H:

Lösung
Wir definieren zunächst eine unerfüllbare Formel $\bot = (A \wedge \neg A)$ und eine gültige Formel $\top = (A \vee \neg A)$. Diese werden in den Aufgaben häufiger Anwendung finden.

(a) Wenn $(F \vee G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

Lösung
Falsch. Sei $F = \bot$ und $G = A$. Dann ist $(F \vee G)$ erfüllbar (mit $\mathcal{B}(A) = 1$), aber F ist unerfüllbar.

(b) Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

Lösung
Wahr. Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, so gibt es eine zu $(F \wedge G)$ passende Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models (F \wedge G)$. Daraus folgt auch $\mathcal{B} \models F$, also ist F erfüllbar.

(c) Wenn $(F \to G)$ gültig ist, dann gilt $F \models G$.

Lösung
Wahr. Sei $(F \to G)$ gültig, sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung und gelte $\mathcal{B} \models F$. Da $(F \to G)$ gültig ist, gilt auch $\mathcal{B} \models (F \to G)$ und somit auch $\mathcal{B} \models G$.

(d) Wenn $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar ist, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ auch gültig.

Lösung
Falsch. Sei $F = A$ und $G = B$. Dann ist $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar mit $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B) = 1$ (oder $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B) = 0$), aber nicht gültig, denn z.B. gilt für $\mathcal{B}(A) = 0$ und $\mathcal{B}(B) = 1$, dass $\mathcal{B} \not\models (F \leftrightarrow G)$.

(e) Wenn $(F \wedge G)$ unerfüllbar ist, dann ist F unerfüllbar oder G unerfüllbar.

Lösung
Falsch. Sei $F = A$ und $G = \neg A$. Dann ist $(F \wedge G)$ unerfüllbar, aber F und G sind jeweils erfüllbar.

(f) Wenn $(F \vee G)$ gültig ist, dann ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

Lösung
Wahr. Sei $(F \vee G)$ gültig und sei $\mathcal{B}$ eine zu $(F \vee G)$ passende Belegung. (Zu jeder Formel F existiert mindestens eine passende Belegung $\mathcal{B} \colon D \to \{0, 1\}$, wobei D die atomaren Formeln sind, die in F vorkommen.) Da $(F \vee G)$ gültig ist, gilt $\mathcal{B} \models (F \vee G)$. Deshalb gilt auch, dass $\mathcal{B} \models F$ oder $\mathcal{B} \models G$. Somit ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

(g) Wenn F und G gültig sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung
Wahr. Seien F und G gültig. Für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt also $\mathcal{B} \models F$ und $\mathcal{B} \models G$, d.h. $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$, also $F \equiv G$.

(h) Wenn F und G erfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung
Falsch. Sei $F = \top$ und $G = A$. Dann sind F und G erfüllbar, aber F ist gültig, d.h. $\mathcal{B} \models F$ für jedes zu F passende $\mathcal{B}$. Für $\mathcal{B}(A) = 0$ gilt aber $\mathcal{B} \not\models G$. Somit gilt $F \not\equiv G$.

(i) Wenn F und G unerfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung
Wahr. Seien F und G unerfüllbar. Für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt also $\mathcal{B} \not\models F$ und $\mathcal{B} \not\models G$, d.h. $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$, also $F \equiv G$.

(j) Wenn F erfüllbar und G gültig ist, dann gilt $F \equiv G$ oder $\neg F$ ist erfüllbar.

Lösung
Wahr. Sei F erfüllbar und G gültig. Im Fall, dass F auch gültig ist, gilt $F \equiv G$. Im Fall, dass F nicht gültig ist, gibt es eine zu F passende Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \not\models F$, also $\mathcal{B} \models \neg F$, d.h. $\neg F$ ist erfüllbar.

(k) Wenn $F \equiv G$ gilt, dann müssen F und G dieselben atomaren Formeln enthalten.

Lösung
Falsch. Für $F = (A \vee \neg A)$ und $G = (B \vee \neg B)$ gilt $F \equiv G$, da beide Formeln gültig sind, aber sie enthalten nicht dieselben atomaren Formeln.

Aufgabe 3
Zeigen Sie folgende Aussagen für beliebige Formeln F, G:

(a) $F \models G$ genau dann, wenn $(F \rightarrow G)$ gültig ist.

Lösung
Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung. Wegen $F \models G$ folgt aus $\mathcal{B} \models F$, dass $\mathcal{B} \models G$. Somit kann der Fall, dass $\mathcal{B} \models F$, aber $\mathcal{B} \not\models G$ nicht eintreten, also gilt auch $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$. Damit ist $(F \rightarrow G)$ gültig.

Wenn $(F \rightarrow G)$ gültig ist, dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt damit auch $\mathcal{B} \models G$, also $F \models G$ (siehe 2c).

(b) $F \equiv G$ genau dann, wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist.

Lösung
Gelte $F \equiv G$. Dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, also ist $(F \leftrightarrow G)$ gültig.

Wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist, dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, also $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt, dass $F \equiv G$.

(c) $F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$.

Lösung
Gelte $F \equiv G$. Dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt somit $\mathcal{B} \models G$, also gilt $F \models G$. Umgekehrt folgt auch aus $\mathcal{B} \models G$, dass $\mathcal{B} \models F$, also gilt $G \models F$.

Gelte nun $F \models G$ und $G \models F$. Sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung. Wenn $\mathcal{B} \models F$, so gilt wegen $F \models G$ auch $\mathcal{B} \models G$. Gelte nun $\mathcal{B} \not\models F$. Wenn $\mathcal{B} \models G$, so erhalten wir wegen $G \models F$ einen Widerspruch. Also kann nur $\mathcal{B} \not\models G$ gelten. Insgesamt gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$, also $F \equiv G$.

Alternativ: Zeige $(F \leftrightarrow G) \equiv (F \to G) \wedge (G \to F)$ und nutze (a)+(b).

(d) $F \equiv \neg\neg F$

Lösung
Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F passende Belegung. Es gilt $\mathcal{B} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models \neg F$, was genau dann gilt, wenn $\mathcal{B} \models \neg\neg F$. Also gilt $F \equiv \neg\neg F$.

(e) $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$

Lösung
Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F und G passende Belegung. Es gilt $\mathcal{B} \models \neg(F \wedge G)$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models (F \wedge G)$. Dies gilt genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models F$ oder $\mathcal{B} \not\models G$. Dies wiederum gilt genau dann, wenn $\mathcal{B} \models \neg F$ oder $\mathcal{B} \models \neg G$, was genau dann gilt, wenn $\mathcal{B} \models (\neg F \vee \neg G)$. Daraus folgt, dass $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$.

(f) Wenn F gültig ist, dann gilt $(F \vee G) \equiv F$.

Lösung
Sei F gültig und sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F und G passende Belegung. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt $\mathcal{B} \models (F \vee G)$, also $F \models (F \vee G)$. Gelte nun $\mathcal{B} \models (F \vee G)$. Da F gültig ist, gilt auch $\mathcal{B} \models F$, also $(F \vee G) \models F$. Insgesamt gilt also, dass $(F \vee G) \equiv F$ (siehe (c)).

Alternativ: Wenn F gültig ist, ist auch $F \vee G$ gültig, also sind F und $F \vee G$ äquivalent (Aufgabe 2, Teil (g)).

Aufgabe 4
Seien F_1, F_2 und F_3 Formeln mit folgenden Wahrheitstafeln:

A	B	C	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Geben Sie DNF(F_i) und KNF(F_i) für $i \in \{1, 2, 3\}$ an. Verwenden Sie hierzu die Definition von Folie 253.

Lösung
Wir lassen im Folgenden die Klammern für $\wedge$ und $\vee$, die nebeneinander stehen, weg.

$$\begin{aligned}
\mathrm{DNF}(F_1) &= ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \\
&\quad \vee (A \wedge B \wedge C)) \\
\mathrm{KNF}(F_1) &= ((A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)) \\
\mathrm{DNF}(F_2) &= ((\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \\
\mathrm{KNF}(F_2) &= ((A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \\
&\quad \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)) \\
\mathrm{DNF}(F_3) &= ((\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \\
&\quad \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \\
\mathrm{KNF}(F_3) &= ((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C))
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Sei $F = ((\neg A \to B) \vee \neg(A \vee \neg C))$. Formen Sie F in KNF um, indem Sie die Regeln auf Folie 258 verwenden.

(b) Was müssen Sie an den Regeln auf Folie 258 ändern, damit eine zu F äquivalente DNF konstruiert wird?

Lösung

(a) Um die Regeln auf Folie 258 anwenden zu können, müssen wir zunächst F in eine Form bringen, die nur $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ verwendet (siehe Folie 203):

$$F = ((\neg\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C))$$

Anwenden der Regeln für $\neg$:

$$\begin{aligned} F &= ((\neg\neg A \lor B) \lor \neg(A \lor \neg C)) \\ &\equiv ((A \lor B) \lor \neg(A \lor \neg C)) \\ &\equiv ((A \lor B) \lor (\neg A \land \neg\neg C)) \\ &\equiv ((A \lor B) \lor (\neg A \land C)) \end{aligned}$$

Anwenden der Regeln für $\lor$:

$$\begin{aligned} F &\equiv ((A \lor B) \lor (\neg A \land C)) \\ &\equiv (((A \lor B) \lor \neg A) \land ((A \lor B) \lor C)) \end{aligned}$$

Jetzt kann man noch vereinfachen, da $A \lor \neg A$ eine Tautologie ist:

$$F \equiv (A \lor B \lor C)$$

(b) Man muss bloß in Punkt 2 die $\land$ und $\lor$ vertauschen, also:

$$\begin{aligned} (F \land (G \lor H)) &\rightsquigarrow ((F \land G) \lor (F \land H)) \\ ((F \lor G) \land H) &\rightsquigarrow ((F \land H) \lor (G \land H)) \end{aligned}$$