

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Beantworten Sie folgende Fragen durch Anwenden des Markierungsalgorithmus. (Hinweis: Wir lassen einige der Klammern zwecks besserer Lesbarkeit weg.)

(a) Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

$$(1) (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C \wedge A \wedge D \wedge (\neg D \vee B)$$

Lösung

Diese Formel ist äquivalent zu

$$(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow B).$$

- Markiere A wegen $1 \rightarrow A$ und markiere D wegen $1 \rightarrow D$.
- Markiere B wegen $D \rightarrow B$ und weil D markiert und B nicht markiert ist.
- Markiere C wegen $A \wedge B \rightarrow C$ und weil A und B markiert sind und C nicht markiert ist.
- Gib "unerfüllbar" aus, weil $C \rightarrow 0$ und C markiert ist.

Die Formel ist also unerfüllbar.

$$(2) (C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee D \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee F) \wedge A \wedge \neg F$$

Lösung

Diese Formel ist äquivalent zu

$$(A \rightarrow C) \wedge (A \wedge B \wedge C \rightarrow D) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (D \wedge E \rightarrow F) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (F \rightarrow 0).$$

- Markiere A wegen $1 \rightarrow A$.
- Markiere C wegen $A \rightarrow C$ und weil A markiert und C nicht markiert ist.
- Markiere B wegen $A \rightarrow B$ und weil A markiert und B nicht markiert ist.
- Markiere D wegen $A \wedge B \wedge C \rightarrow D$ und weil A , B und C markiert sind und D nicht markiert ist.
- Gib "erfüllbar" aus.

Die Formel ist also erfüllbar.

(b) Welche der folgenden Formeln sind gültig?

$$(1) (\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A$$

Lösung

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \neg((\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A) \\ \equiv & (B \vee \neg C) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge A \\ \equiv & (C \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow 0) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow A) \end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere A wegen $1 \rightarrow A$.
- Markiere B wegen $A \rightarrow B$ und weil A markiert und B nicht markiert ist.
- Gib erfüllbar aus.

Die Formel ist also nicht gültig.

$$(2) (A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I$$

Lösung

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \neg((A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \\ & \vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I) \\ \equiv & (A \wedge D \rightarrow I) \wedge (B \wedge E \rightarrow D) \wedge (B \wedge C \wedge H \rightarrow A) \\ & \wedge (F \rightarrow E) \wedge (F \rightarrow C) \wedge (G \rightarrow H) \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow F) \wedge (1 \rightarrow G) \wedge (I \rightarrow 0) \end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere B wegen $1 \rightarrow B$, markiere F wegen $1 \rightarrow F$ und markiere G wegen $1 \rightarrow G$.
- Markiere E wegen $F \rightarrow E$ und weil F markiert und E nicht markiert ist.
- Markiere C wegen $F \rightarrow C$ und weil F markiert und C nicht markiert ist.
- Markiere D wegen $B \wedge E \rightarrow D$ und weil B und E markiert sind und D nicht markiert ist.
- Markiere H wegen $G \rightarrow H$ und weil G markiert und H nicht markiert ist.
- Markiere A wegen $B \wedge C \wedge H \rightarrow A$ und weil B , C und H markiert sind und A nicht markiert ist.
- Markiere I wegen $A \wedge D \rightarrow I$ und weil A und D markiert sind und I nicht markiert ist.
- Gib unerfüllbar aus, weil $I \rightarrow 0$ und I markiert ist.

Die Formel ist also gültig.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$$(1) \neg C \vee \neg D \vee E, A, \neg A \vee C \vee \neg B \models E \vee \neg B$$

Lösung

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & (\neg C \vee \neg D \vee E) \wedge A \wedge (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge \neg(E \vee \neg B) \\ \equiv & (\neg C \vee \neg D \vee E) \wedge A \wedge (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge \neg E \wedge B \\ \equiv & (C \wedge D \rightarrow E) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (A \wedge B \rightarrow C) \wedge (E \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow B) \end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere A wegen $1 \rightarrow A$ und markiere B wegen $1 \rightarrow B$.
- Markiere C wegen $A \wedge B \rightarrow C$ und weil A und B markiert sind und C nicht markiert ist.
- Gib "erfüllbar" aus.

Die Aussage ist also falsch.

$$(2) A \vee \neg B \vee \neg D, \neg B \vee \neg G \vee F, \neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F, B, D \models E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)$$

Lösung

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & (A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg G \vee F) \wedge (\neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F) \\ & \wedge B \wedge D \wedge \neg(E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)) \\ \equiv & (A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg G \vee F) \wedge (\neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F) \\ & \wedge B \wedge D \wedge \neg E \wedge G \wedge (C \vee \neg D) \\ \equiv & (B \wedge D \rightarrow A) \wedge (B \wedge G \rightarrow F) \wedge (A \wedge C \wedge F \rightarrow E) \\ & \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow G) \wedge (D \rightarrow C) \end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere B wegen $1 \rightarrow B$, markiere D wegen $1 \rightarrow D$ und markiere G wegen $1 \rightarrow G$.
- Markiere A wegen $B \wedge D \rightarrow A$ und weil B und D markiert sind und A nicht markiert ist.
- Markiere F wegen $B \wedge G \rightarrow F$ und weil B und G markiert sind und F nicht markiert ist.
- Markiere C wegen $D \rightarrow C$ und weil D markiert und C nicht markiert ist.
- Markiere E wegen $A \wedge C \wedge F \rightarrow E$ und weil A , C und F markiert sind und E nicht markiert ist.
- Gib unerfüllbar aus, weil $E \rightarrow 0$ und E markiert ist.

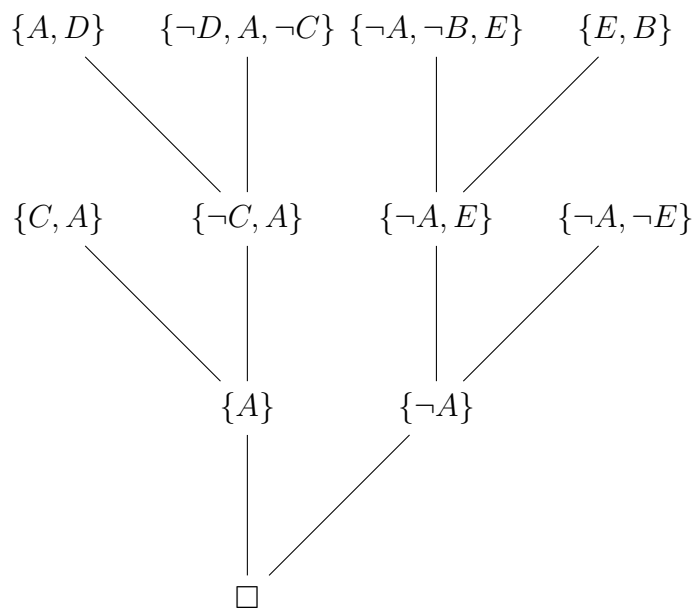
Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie mit dem Resolutionsverfahren, welche der folgenden Klauselmengen erfüllbar sind.

- (a) $\{\{-E, \neg A\}, \{\neg D, A, \neg C\}, \{A, D\}, \{A, C\}, \{\neg A, \neg B, E\}, \{E, B\}\}$

Lösung

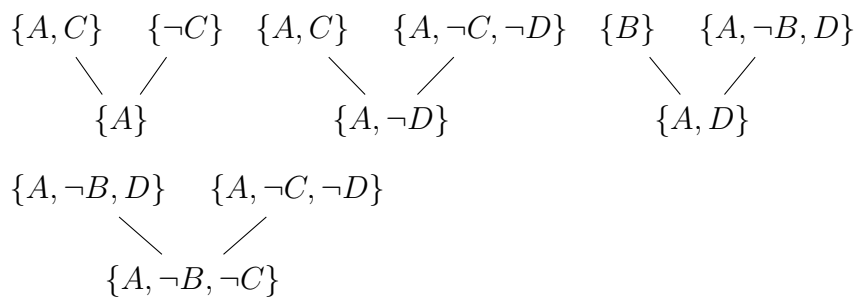


Die Klauselmenge ist also unerfüllbar.

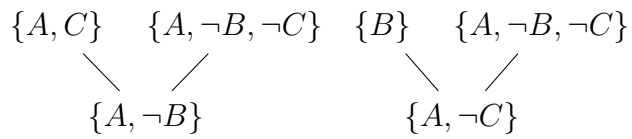
- (b) $\{\{A, C\}, \{B\}, \{\neg C\}, \{A, \neg B, D\}, \{A, \neg C, \neg D\}\}$

Lösung

Aus den Ausgangsklauseln können wir folgende neue Klauseln resolvieren:



Danach können wir noch zwei neue Klauseln resolvieren:

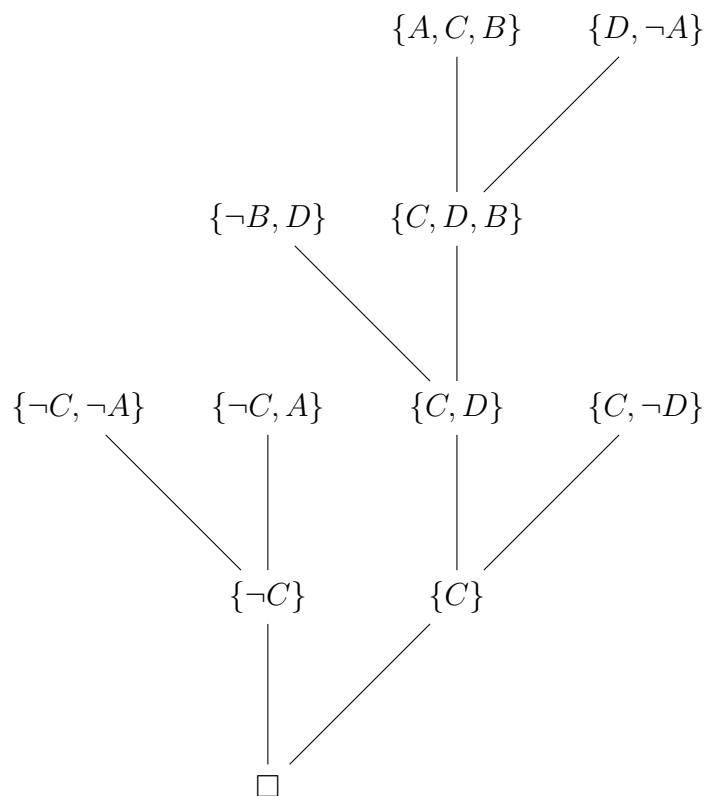


Nun sind keine weiteren Resolutionsschritte mehr möglich. Da wir nicht die leere Klausel \square herleiten konnten, ist die Klauselmenge erfüllbar.

Es wäre ebenfalls erlaubt zu argumentieren, dass man ohne das $\neg A$ für keines der vier atomaren Formeln ein Klausel-Paar $(\{L\}, \{\neg L\})$ ableiten kann.

- (c) $\{\{\neg C, A\}, \{C, \neg D\}, \{D, \neg B\}, \{D, \neg A\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, C, B\}\}$

Lösung



Die Klauselmenge ist also unerfüllbar.

Aufgabe 3

Berechnen Sie $\text{Res}^i(F)$ für $i = 0, 1, \dots$ für die Formel F mit Klauselmenge

$$\{\{A, \neg B\}, \{A, B, \neg C\}, \{B, C\}, \{\neg A, \neg C\}\}.$$

Was ist die kleinste Zahl n mit $\text{Res}^n(F) = \text{Res}^*(F)$?

Lösung

Es gilt $\text{Res}^0(F) = F$. Des Weiteren gilt

$$\text{Res}^1(F) = \text{Res}^0(F) \cup \{\{A, \neg C\}, \{A, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A, B\}\},$$

$$\text{Res}^2(F) = \text{Res}^1(F) \cup \{\{A\}, \{A, \neg A\}, \{B, \neg B\}, \{C, \neg C\}, \{B\}, \{\neg C\}\}$$

und $\text{Res}^{i+2}(F) = \text{Res}^2(F)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also $\text{Res}^*(F) = \text{Res}^2(F)$.