Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Berechenbarkeit und Logik
WS 2023/24

# Übungsblatt 12

**Aufgabe 1**
Sei $P$ ein einstelliges und $R$ ein zweistelliges Relationssymbol; außerdem sei $f$ ein einstelliges Funktionssymbol. Wobei handelt es sich um prädikatenlogische Formeln?

(a) $\exists x \neg P(x)$

**Lösung**
Ja.

(b) $\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow f(R(x,y)))$

**Lösung**
Nein, denn $R(x,y)$ ist eine Formel und $f(R(x,y))$ ist damit keine Formel.

(c) $f(x) = f(x)$

**Lösung**
Ja, siehe Folie 313 zur Konvention bzgl. „$=$ “.

(d) $\forall n \exists p \exists q \, n = p \cdot q$

**Lösung**
Nein, da $\cdot$ nicht definiert ist.

(e) $\exists x \forall y (P(y) \vee \neg \forall x R(x, f(x)))$

**Lösung**
Ja.

(f) $P(x)$

**Lösung**
Ja.

(g) $f(f(x))$

**Lösung**
Nein, das ist nur ein Term.

**Aufgabe 2**
Gegeben sei folgende Formel

$$F = ((Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee \forall x R(x, z, g(x)))$$

(a) Geben Sie alle Teilformeln und Terme an, die in $F$ vorkommen.

**Lösung**
Die Terme sind $x$, $f(x)$, $y$, $a$, $z$ und $g(x)$. Die atomaren Teilformeln sind $Q(x)$, $P(f(x), y)$, $Q(a)$ und $R(x, z, g(x))$. Die restlichen Teilformeln sind

$$\begin{aligned}
&(P(f(x), y) \wedge Q(a)),\\
&\forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a)),\\
&\exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a)),\\
&(Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))),\\
&\forall x R(x, z, g(x))
\end{aligned}$$

und $F$ selbst.

(b) Welche der Teilformeln sind Aussagen?

**Lösung**
$Q(a)$ und $\exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))$.

(c) Geben Sie für jede Variable an, ob sie frei oder gebunden in $F$ vorkommt.

**Lösung**
Das $x$ in $Q(x)$ und $z$ sind frei, alle anderen gebunden.

(d) Geben Sie die Matrix von $F$ an.

**Lösung**
$F^* = ((Q(x) \vee (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee R(x, z, g(x)))$

**Aufgabe 3**
Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, wobei $U_\mathcal{A}$ die Menge aller Menschen ist und $I_\mathcal{A}$ die folgende Interpretation ist:

- $W^\mathcal{A}(x)$: $x$ ist weiblich
- $K^\mathcal{A}(x, y)$: $x$ kennt $y$
- $v^\mathcal{A}(x) = y$: $y$ ist biologischer Vater von $x$
- $m^\mathcal{A}(x) = y$: $y$ ist biologischer Mutter von $x$

- $a^{\mathcal{A}}$ ist Adam, $e^{\mathcal{A}}$ ist Eva

Was bedeuten die folgenden prädikatenlogischen Formeln?

(a) $\forall x W(m(x))$

**Lösung**
Jede Mutter ist weiblich.

(b) $(v(x) = a \wedge K(x, e))$

**Lösung**
Der Vater von $x$ ist Adam und $x$ kennt Eva.

(c) $\exists x(W(x) \wedge K(a, x))$

**Lösung**
Es gibt eine Frau, die von Adam gekannt wird.

(d) $\neg\exists x \forall y(W(y) \rightarrow K(x, y))$

**Lösung**
Es gibt niemanden, der alle Frauen kennt.

(e) $\forall x \neg(\exists y\, v(y) = x \wedge \exists y\, m(y) = x)$

**Lösung**
Niemand ist sowohl Mutter als auch Vater.

(f) $\exists x \exists y(K(x, y) \wedge \neg K(y, x))$

**Lösung**
Es gibt zwei Menschen, die sich nicht gegenseitig kennen.

**Aufgabe 4**
Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol $f$ und ein zweistelliges Prädikatensymbol $R$. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x, y) = x$, $R^{\mathcal{C}} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x, y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{N}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x, y) = x \cap y$, $R^{\mathcal{P}} = \{(x, y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $F_a = \exists x \forall y R(y, x)$

**Lösung**
$F_a$ bedeutet, dass es ein größtes Element bezüglich $R$ gibt.

Es gilt $\mathcal{C} \not\models F_a$, denn $\mathcal{C}_{[x/0][y/1]} \not\models R(y, x)$, $\mathcal{C}_{[x/1][y/2]} \not\models R(y, x)$ und $\mathcal{C}_{[x/2][y/0]} \not\models R(y, x)$.

Für $\mathcal{N}$ bedeutet $F_a$, dass es eine größte natürliche Zahl gibt. Demnach gilt $\mathcal{N} \not\models F_a$. Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{N}_{[x/n]} \models \forall y R(y, x)$, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{N}_{[x/n][y/m]} \models R(y, x)$, also $m \leq n$. Dies ist aber falsch für $m = n + 1$.

Für $\mathcal{P}$ bedeutet $F_a$, dass es eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ gilt, dass $M \subseteq A$. Dies gilt für $\mathbb{N}$ selbst, also $\mathcal{P} \models F_a$. Genauer: Sei $M \in 2^{\mathbb{N}}$. Dann gilt $\mathcal{P}_{[x/\mathbb{N}][y/M]} \models R(y, x)$, denn $M \subseteq \mathbb{N}$.

(b) $F_b = \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$

**Lösung**
$F_b$ bedeutet, dass $R$ total ist.

Es gilt $\mathcal{C} \not\models F_b$, denn $\mathcal{C}_{[x/0][y/0]} \not\models (R(x, y) \vee R(y, x))$, weil $(0, 0) \notin R^{\mathcal{C}}$.

Es gilt $\mathcal{N} \models F_b$, denn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq m$ oder $m \leq n$, bzw. $\mathcal{N}_{[x/n][y/m]} \models (R(x, y) \vee R(y, x))$.

Es gilt $\mathcal{P} \not\models F_b$, denn sei $M = \{1\}$ und $M' = \{2\}$. Dann gilt $M \not\subseteq M'$ und $M' \not\subseteq M$, also $\mathcal{P}_{[x/M][y/M']} \not\models (R(x, y) \vee R(y, x))$.

(c) $F_c = \forall x \forall y \forall z \forall w ((R(x, y) \wedge R(z, w)) \rightarrow R(f(x, z), f(y, w)))$

**Lösung**
Es gilt $\mathcal{C} \models F_c$, denn seien $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, wobei $(a, b) \in R^{\mathcal{C}}$ und $(c, d) \in R^{\mathcal{C}}$. Dann folgt wegen $f^{\mathcal{C}}(a, c) = a$ und $f^{\mathcal{C}}(b, d) = b$ auch, dass $(f^{\mathcal{C}}(a, c), f^{\mathcal{C}}(b, d)) \in R^{\mathcal{C}}$.

Es gilt $\mathcal{N} \models F_c$, denn seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, wobei $a \leq b$ und $c \leq d$. Dann gilt auch $a \cdot c \leq b \cdot d$.

Es gilt $\mathcal{P} \models F_c$, denn seien $A, B, C, D \subseteq \mathbb{N}$, wobei $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$. Dann gilt auch $A \cap C \subseteq B \cap D$.

**Aufgabe 5**
Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}), I_{\mathcal{N}})$ die Struktur mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ und der Gleichheit $=$, welche alle die übliche Bedeutung haben sollen, also $I_{\mathcal{N}}(+)(x, y) = x + y$ und $I_{\mathcal{N}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_{\mathcal{N}}(=) = \{(x, x) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

(a) $x$ ist ungerade.

**Lösung**
$\neg\exists y\ x = y + y$

(b) $x < y$.

**Lösung**
$\exists z\ y = x + z$

(c) $y$ ist Vielfaches von $x$.

**Lösung**
$\exists z\ y = x \cdot z$

(d) $x$ ist gleich 1.

**Lösung**
$\forall y\ y \cdot x = y$

(e) $x$ mod $y = z$.

**Lösung**
$\exists w\ z + w \cdot y = x$

(f) Es gibt keine größte natürliche Zahl.

**Lösung**
$\forall x \exists y\ x < y$, wobei $x < y$ die Formel von Aufgabe b ist. Damit haben wir

$$\forall x \exists y \exists z\ y = x + z.$$

(g) $x$ ist eine Primzahl.

**Lösung**
$(x \neq 1) \wedge \forall y\ ((\exists z\ x = y \cdot z) \rightarrow (y = 1 \vee y = x))$, wobei wir hier die Formel von Aufgabe d einsetzen können. Dadurch erhalten wir

$$(\forall z\ z \cdot w = z) \wedge \neg(x = w) \wedge \forall y\ ((\exists z\ x = y \cdot z) \rightarrow (y = w \vee y = x))$$