Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 13

Aufgabe 1
Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = \forall x \exists y (P(x) \to P(y))$

Lösung
Gültig. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_a passende Struktur und sei $d \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Im Fall, dass $d \notin P^{\mathcal{A}}$, gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d][y/d']} \models (P(x) \to P(y))$ für alle $d' \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Wenn $d \in P^{\mathcal{A}}$, dann gilt $\mathcal{A}_{[x/d][y/d]} \models (P(x) \to P(y))$. In beiden Fällen gilt also $\mathcal{A}_{[x/d]} \models \exists y (P(x) \to P(y))$. Insgesamt gilt daher $\mathcal{A} \models F_a$.

(b) $F_b = \forall x (R(x,y) \wedge f(x) = y)$

Lösung
Erfüllbar, aber nicht gültig. Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$ mit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{0\}$, $y^{\mathcal{A}} = 0$, $R^{\mathcal{A}} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ und $f^{\mathcal{A}}(x) = x$. Außerdem gilt für jede zu F_b passende Struktur $\mathcal{B}$ mit $R^{\mathcal{B}} = \emptyset$, dass $\mathcal{B} \not\models F_b$, zum Beispiel für $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{0\}$, $y^{\mathcal{B}} = 0$, $R^{\mathcal{B}} = \emptyset$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = x$.

(c) $F_c = (\forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \to S(x,y)) \wedge \forall x \forall y (S(x,y) \to R(x,y)) \wedge \neg R(a,b))$

Lösung
Unerfüllbar. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_c passende Struktur, wobei wir annehmen, dass $\mathcal{A} \models F_c$. Wegen $\mathcal{A} \models \neg R(a,b)$, muss $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \notin R^{\mathcal{A}}$ gelten. Wenn $a^{\mathcal{A}} = b^{\mathcal{A}}$, so ist dies ein Widerspruch zu $\mathcal{A} \models \forall x R(x,x)$. Sei also $a^{\mathcal{A}} \neq b^{\mathcal{A}}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (x \neq y \to S(x,y))$, gilt also, dass $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \in S^{\mathcal{A}}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (S(x,y) \to R(x,y))$, folgt dann auch, dass $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \in R^{\mathcal{A}}$, was aber ein Widerspruch zu $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \notin R^{\mathcal{A}}$ ist. Insgesamt muss also $\mathcal{A} \not\models F_c$ gelten.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a := \forall y \exists x \; f(x) = y$

Lösung
Es gilt $\mathcal{A} \models F_a$ mit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $f^{\mathcal{A}}(x) = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{B} \not\models F_a$ mit $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{0,1\}$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = 0$.

(b) $F_b := \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

Lösung
Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$ und $f^\mathcal{A}(x) = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{B} \not\models F_b$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ und $f^\mathcal{B}(x) = 0$.

(c) $F_c := (\exists y \forall x\, f(x) = g(x, y) \wedge \exists x\, f(x) \neq g(x, x))$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $f^\mathcal{A}(x) = x$, $g^\mathcal{A}(x, 0) = x$ und $g^\mathcal{A}(x, 1) = 0$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \exists y \forall x\, f(x) = g(x, y)$, weil $\mathcal{A}_{[x/d][y/0]}(f(x)) = d$ und $\mathcal{A}_{[x/d][y/0]}(g(x, y)) = d$ für alle $d \in \{0, 1\}$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \exists x\, f(x) \neq g(x, x)$, weil $\mathcal{A}_{[x/1]}(f(x)) = 1$ und $\mathcal{A}_{[x/1]}(g(x, x)) = 0$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F_c$. Mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $f^\mathcal{B}(x) = 0$ und $g^\mathcal{B}(x, y) = 0$ gilt $\mathcal{B} \not\models F_c$, weil $\mathcal{B} \not\models \exists x\, f(x) \neq g(x, x)$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie folgende Behauptungen für beliebige Formeln F und G:

(a) $\exists x(F \wedge G) \models (\exists x F \wedge \exists x G)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend ist, und gelte $\mathcal{A} \models \exists x(F \wedge G)$. Dann gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \wedge G)$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A} \models \exists x F$ und $\mathcal{A} \models \exists x G$, also $\mathcal{A} \models (\exists x F \wedge \exists x G)$.

(b) $\forall x(F \rightarrow G) \models (\forall x F \rightarrow \forall x G)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \forall x(F \rightarrow G)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \rightarrow G)$ für alle $d \in \mathcal{U}_A$. Das heißt, dass für jedes $d \in \mathcal{U}_A$ gilt, dass wenn $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$, dann gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Gelte nun außerdem $\mathcal{A} \models \forall x F$, woraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Zusammen erhalten wir also, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$ für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \models \forall x G$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models (\forall x F \rightarrow \forall x G)$.

(c) $(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x(F \vee G)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend. Gelte außerdem $\mathcal{A} \models (\exists x F \vee \exists x G)$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Im ersten Fall gilt $\mathcal{A} \models \exists x F$. Daraus folgt, dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$. Das heißt auch, dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Das heißt, es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$, also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Der zweite Fall, also $\mathcal{A} \models \exists x G$, ist analog.

Gelte nun $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Das heißt, es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Es gibt also ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Also folgt $\mathcal{A} \models \exists x F$ oder $\mathcal{A} \models \exists x G$. Insgesamt folgt dann auch $\mathcal{A} \models (\exists x F \vee \exists x G)$.

(d) $(\exists x F \wedge \exists x G) \not\equiv \exists x(F \wedge G)$

Lösung
Sei $F = P(x)$ und $G = Q(x)$. Sei außerdem $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0,1\}$ mit $P^\mathcal{B} = \{0\}$ und $Q^\mathcal{B} = \{1\}$. Es gilt $\mathcal{B} \models \exists x P(x)$ und $\mathcal{B} \models \exists x Q(x)$, also $\mathcal{B} \models (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$. Auf der anderen Seite gilt $\mathcal{B}_{[x/0]} \not\models Q(x)$ und $\mathcal{B}_{[x/1]} \not\models P(x)$. Das heißt, es gibt kein $d \in \{0,1\}$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]} \models P(x)$ und $\mathcal{B}_{[x/d]} \models Q(x)$. Also es gibt kein $d \in \{0,1\}$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]} \models (P(x) \wedge Q(x))$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B} \not\models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

Aufgabe 4
Geben Sie für die folgende Formel zunächst eine zu ihr äquivalente BPF an. Überführen Sie diese anschließend in Skolemform.

$$F = \Big(\forall x \exists y \big(R(x,y) \to \exists r R(r, f(y,z))\big) \wedge \forall x \neg \exists z \big(P(z) \wedge \forall w R(x,w)\big)\Big)$$

Lösung
Der Beweis zum Satz auf Folie 327 (Für jede Formel gibt es eine äquivalente Formel in BPF) wurde mit Induktion über den Formelaufbau geführt. Wir verwenden hier stattdessen einen globalen Ansatz, um die BPF herzustellen.
Zunächst benennen wir alle gebundenen Variablen um. Ein einfacher Ansatz ist, diese durchzunummerieren, also aus x wird x_1, x_2, usw.

$$F \equiv \Big(\forall x_1 \exists y_1 \big(R(x_1,y_1) \to \exists r_1 R(r_1, f(y_1,z))\big) \wedge \forall x_2 \neg \exists z_1 \big(P(z_1) \wedge \forall w_1 R(x_2,w_1)\big)\Big)$$

Als Nächstes ersetzen wir alle syntaktischen Abkürzungen wie $\to$ und $\leftrightarrow$ durch die Basissyntax, die nur $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ verwendet.

$$F \equiv \Big(\forall x_1 \exists y_1 \big(\neg R(x_1,y_1) \vee \exists r_1 R(r_1, f(y_1,z))\big) \wedge \forall x_2 \neg \exists z_1 \big(P(z_1) \wedge \forall w_1 R(x_2,w_1)\big)\Big)$$

Quantoren lassen sich einfach über $\wedge$ und $\vee$ ziehen, aber nicht über $\neg$. Deshalb schieben wir die $\neg$ so weit nach innen, dass sie nur noch unter, aber nicht über Quantoren vorkommen. Dazu verwenden wir die Äquivalenzen $\forall x F \equiv \neg\exists x \neg F$ und $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$, wobei F eine beliebige Formel ist.

$$F \equiv \Big(\forall x_1 \exists y_1 \big(\neg R(x_1,y_1) \vee \exists r_1 R(r_1, f(y_1,z))\big) \wedge \forall x_2 \forall z_1 \big(\neg P(z_1) \vee \exists w_1 \neg R(x_2,w_1)\big)\Big)$$

Wie bereits besprochen, lassen sich dann die Quantoren einfach nach vorne ziehen:

$$F \equiv \forall x_1 \exists y_1 \exists r_1 \forall x_2 \forall z_1 \exists w_1 \Big(\big(\neg R(x_1,y_1) \vee R(r_1, f(y_1,z))\big) \wedge \big(\neg P(z_1) \vee \neg R(x_2,w_1)\big)\Big)$$

Der Algorithmus zum Herstellen der Skolemform auf Folie 332 ist auch induktiv formuliert. Wir verwenden auch hier wieder einen globalen Ansatz und führen alle Ersetzungen der $\exists$ parallel aus.

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall z_1 \Big(\big(\neg R(x_1, f_{y_1}(x_1)) \vee R(f_{r_1}(x_1), f(f_{y_1}(x_1), z))\big) \wedge \big(\neg P(z_1) \vee \neg R(x_2, f_{w_1}(x_1,x_2,z_1))\big)\Big)$$

Aufgabe 5
Überführen Sie die folgenden Formeln jeweils in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform, indem Sie wie auf Folie 348 beschrieben vorgehen:

Lösung
Bei voriger Aufgabe haben wir eine Formel zunächst in BPF und anschließend in Skolemform überführt. Zusätzlich dazu müssen wir nun zwei weitere Dinge tun: Wir müssen eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage herstellen. Eine Aussage darf keine freien Variablen enthalten, was wir dadurch erreichen, dass wir jede freie Variable durch eine neue Konstante ersetzen. Außerdem muss die neue Formel in Klauselform sein. Das heißt, ihre Matrix (die Formel ohne Quantoren) muss in KNF sein.

(a) $F_a = (\forall y(\forall x R(x) \to Q(y,z)) \land \forall x P(x))$

Lösung
Bereinigen: $(\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \to Q(y_1,z)) \land \forall x_2 P(x_2))$

Frei vorkommende Variablen ersetzen: $(\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \to Q(y_1,a_z)) \land \forall x_2 P(x_2))$

Pränexform:

- Grundform mit $\land,\lor,\neg$: $(\forall y_1(\neg\forall x_1 R(x_1) \lor Q(y_1,a_z)) \land \forall x_2 P(x_2))$
- Reinziehen von $\neg$: $(\forall y_1(\exists x_1 \neg R(x_1) \lor Q(y_1,a_z)) \land \forall x_2 P(x_2))$
- Quantoren nach vorne: $\forall y_1 \exists x_1 \forall x_2((\neg R(x_1) \lor Q(y_1,a_z)) \land P(x_2))$

Skolemform: $\forall y_1 \forall x_2((\neg R(f_{x_1}(y_1)) \lor Q(y_1,a_z)) \land P(x_2))$

Die Matrix der Formel ist bereits in KNF.

(b) $F_b = \forall z(\exists y \neg(R(y) \lor \forall x R(x)) \lor \forall x Q(z,w))$

Lösung
Bereinigen: $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \lor \forall x_1 R(x_1)) \lor \forall x_2 Q(z_1,w))$

Frei vorkommende Variablen ersetzen: $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \lor \forall x_1 R(x_1)) \lor \forall x_2 Q(z_1,a_w))$

Pränexform:

- Grundform mit $\land,\lor,\neg$: Die Formel ist bereits in Grundform.
- Reinziehen von $\neg$: $\forall z_1(\exists y_1(\neg R(y_1) \land \exists x_1 \neg R(x_1)) \lor \forall x_2 Q(z_1,a_w))$
- Quantoren nach vorne: $\forall z_1 \exists y_1 \exists x_1 \forall x_2((\neg R(y_1) \land \neg R(x_1)) \lor Q(z_1,a_w))$

Skolemform: $\forall z_1 \forall x_2((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \land \neg R(f_{x_1}(z_1))) \lor Q(z_1,a_w))$

Matrix in KNF: $\forall z_1 \forall x_2((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \lor Q(z_1,a_w)) \land (\neg R(f_{x_1}(z_1)) \lor Q(z_1,a_w)))$