Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Berechenbarkeit und Logik
WS 2023/24

# Übungsblatt zum Klausurtraining (Logik)

**Aufgabe 1**
Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(B \wedge B \to A) \wedge (1 \to C) \wedge (D \to E) \wedge (1 \to D) \wedge (C \to B) \wedge (A \to 0)$$

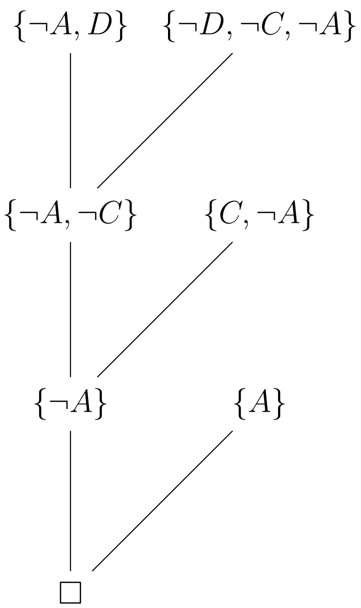
**Lösung**

- Markiere $C$ wegen $1 \to C$ und $D$ wegen $1 \to D$.
- Markiere $B$ wegen $C \to B$ und weil $C$ markiert und $B$ noch nicht markiert ist.
- Markiere $A$ wegen $B \wedge B \to A$ und weil $B$ markiert und $A$ noch nicht markiert ist.
- Gib unerfüllbar aus, weil $A \to 0$ und $A$ markiert ist.

**Aufgabe 2**
Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{A\}, \{\neg D, C\}, \{C, \neg A\}, \{D, \neg D\}, \{\neg A, D\}, \{\neg D, \neg C, \neg A\}\}$$

**Lösung**



**Aufgabe 3**
Sei $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ eine Struktur, wobei das Universum gegeben ist als $U_\mathcal{A} = \{a, b\}^*$ und die Interpretationsfunktion definiert ist durch

- $f^\mathcal{A}(x, y) = xy$ (die Konkatenation von Wörtern),
- $P^\mathcal{A} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält genau ein } a\}$
- $Q^\mathcal{A} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade }\}$
- $c^\mathcal{A} = aba$

und „=“ wie üblich ein 2-stelliges Prädikatensymbol darstellt, das mit der Gleichheit interpretiert wird. Formulieren Sie die folgenden Sätze als prädikatenlogische Formeln:

(a) Das Wort $aba$ hat ungerade Länge.

**Lösung**
$\neg Q(c)$

(b) Es gibt ein Wort, das genau ein $a$ enthält und gerade Länge hat.

**Lösung**
$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(c) Das Wort $aba$ enthält genau zwei $a$.

**Lösung**
$\exists y \exists z(P(y) \wedge P(z) \wedge c = f(y, z))$

(d) $x$ ist ein Teilstring von $y$.

**Lösung**
$\exists z_1 \exists z_2 \; y = f(z_1, f(x, z_2))$

(e) Jede Kontatenation zweier Wörter gerader Länge ergibt ein Wort gerader Länge.

**Lösung**
$\forall x \forall y((Q(x) \wedge Q(y)) \to Q(f(x, y)))$

(f) $x$ ist das leere Wort.

**Lösung**
$\forall y \; y = f(x, y)$

**Aufgabe 4**
Betrachten Sie die Struktur $\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ ist die Menge aller Punkte und Geraden im $\mathbb{R}^2$.
- ${S_1}^\mathcal{A} = \{(x, y) \mid x \text{ ist ein Punkt auf der Geraden } y.\}$
- ${S_2}^\mathcal{A} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind parallele Geraden.}\}$
- ${S_3}^\mathcal{A} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind orthogonale Geraden.}\}$
- ${S_4}^\mathcal{A} = \{(x, y, z) \mid x \text{ ist der Spiegelpunkt von } y \text{ bezüglich der Geraden } z.\}$

Formulieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik die folgenden Aussagen (mit freien Variablen) in dieser Struktur:

(a) Der Punkt $x$ ist der einzige Schnittpunkt der Geraden $y$ und $z$.

**Lösung**
Zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$ schneiden sich in genau einem Punkt genau dann, wenn sie nicht parallel sind. Damit ist die Formel $(\neg S_2(y, z) \wedge S_1(x, y) \wedge S_1(x, z))$.

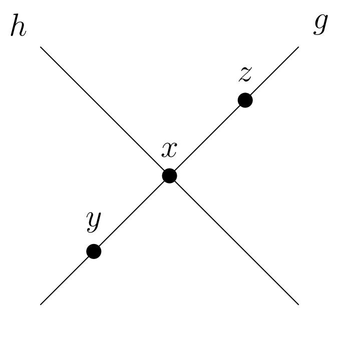
(b) Die Geraden $x$, $y$ und $z$ schließen ein Dreieck ein.

**Lösung**
Drei Geraden in $\mathbb{R}^2$ schließen ein Dreieck ein genau dann, wenn sie paarweise nicht parallel sind und sich nicht alle in einem Punkt schneiden. Die Formel ist

$$(\neg S_2(x, y) \wedge \neg S_2(x, z) \wedge \neg S_2(y, z) \wedge \neg \exists w (S_1(w, x) \wedge S_1(w, y) \wedge S_1(w, z))).$$

(c) Der Punkt $x$ ist Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten $y$ und $z$.

**Lösung**
Wir ziehen zunächst eine Gerade $g$ durch $y$ und $z$. Dann sind wir an einer Geraden $h$ interessiert, die senkrecht zu $g$ ist, sich in $x$ mit $g$ schneidet und $y$ Spiegelpunkt von $z$ bezüglich $h$ ist.



Die Formel ist dann

$$\exists g \exists h \big(S_1(x,g) \wedge S_1(y,g) \wedge S_1(z,g) \wedge S_1(x,h) \wedge S_3(g,h) \wedge S_4(y,z,h)\big).$$

Man beachte, dass der Sonderfall, dass $y$ und $z$ gleich sind, und somit $x = y = z$, damit auch abgedeckt ist.

**Aufgabe 5**
Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = (\exists x P(f(x, g(x))) \wedge \forall x \neg P(f(x,x)))$

**Lösung**
Erfüllbar, aber nicht gültig. Es gilt $\mathcal{A} \models F_a$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0,1\}$, $P^\mathcal{A} = \{0\}$,

$$f^\mathcal{A}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

$$g^\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0, \\ 0 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Beweis: Sei $d \in \{0,1\}$. Dann gilt $f^\mathcal{A}(d,d) = 1 \notin P^\mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \models \forall x \neg P(f(x,x))$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \exists x P(f(x, g(x)))$, weil

$$f^\mathcal{A}(0, g^\mathcal{A}(0)) = f^\mathcal{A}(0,1) = 0 \in P^\mathcal{A}.$$

Auf der anderen Seite gilt für jede zu $F_a$ passende Struktur $\mathcal{B}$ mit $P^\mathcal{B} = \emptyset$, dass $\mathcal{B} \not\models F_a$, denn $\mathcal{B} \not\models \exists x P(f(x, g(x)))$. Ein Beispiel für solch eine Struktur ist $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $f^\mathcal{B}(x,y) = 0$, $g^\mathcal{B}(x) = x$, $P^\mathcal{B} = \emptyset$.

(b) $F_b = (\exists y \forall x R(x,y) \to \forall x \exists y R(x,y))$

**Lösung**
Gültig. Sei $\mathcal{A}$ eine zu $F_b$ passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \exists y \forall x R(x,y)$. D.h. es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[y/d]} \models \forall x R(x,y)$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, sodass für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt, dass $\mathcal{A}_{[y/d][x/d']} \models R(x,y)$. Das heißt, dass es für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt, sodass $\mathcal{A}_{[x/d'][y/d]} \models R(x,y)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d']} \models \exists y R(x,y)$ für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ und somit auch $\mathcal{A} \models \forall x \exists y R(x,y)$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F_b$.

(c) $F_c = (\forall y \exists x f(x) = y \wedge \exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y)))$

**Lösung**
Erfüllbar, aber nicht gültig. Die Formel besagt, dass $f$ surjektiv, aber nicht injektiv ist. Damit ist jede zu $F_c$ passende Struktur mit endlichem Universum kein Modell von

$F_c$. Ein Beispiel dafür ist die Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$ und $f^\mathcal{A}(x) = x$, denn gibt es keine $d, d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d][y/d']} \models x \neq y$, also $\mathcal{A} \not\models \exists x \exists y(x \neq y \wedge f(x) = f(y))$. Daher gilt $\mathcal{A} \not\models F_c$. Sei nun $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \mathbb{N}$ und

$$f^\mathcal{B}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $\mathcal{B} \models \forall y \exists x f(x) = y$, denn für $d \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f^\mathcal{B}(d+1) = d$. Außerdem gilt, dass $0 \neq 1$ und $f^\mathcal{B}(0) = 0 = f^\mathcal{B}(1)$. Somit gilt auch $\mathcal{B} \models \exists x \exists y(x \neq y \wedge f(x) = f(y))$, also gilt insgesamt, dass $\mathcal{B} \models F_c$.

**Aufgabe 6**
Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a := (\forall x P(f(x,x)) \wedge \forall x \forall y(x \neq y \rightarrow \neg P(f(x,y))))$

**Lösung**
Sei $\mathcal{A}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$, $f^\mathcal{A}(x,y) = 0$ und $P^\mathcal{A} = \{0\}$. Aus $|\mathcal{U}_\mathcal{A}| = 1$ folgt, dass $\mathcal{A} \models \forall x \forall y(x \neq y \rightarrow \neg P(f(x,y)))$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \forall x P(f(x,x))$, also insgesamt auch $\mathcal{A} \models F_a$. Sei $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $f^\mathcal{B}(x) = 0$ und $P^\mathcal{B} = \emptyset$. Dann gilt $\mathcal{B} \not\models F_a$, weil $\mathcal{B} \not\models \forall x P(f(x,x))$.

(b) $F_b := (\forall x(P(x) \vee Q(x,y)) \wedge \neg Q(y,y) \wedge \forall x(x \neq y \rightarrow \neg P(x)))$

**Lösung**
Sei $\mathcal{A}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$, $y^\mathcal{A} = 0$, $P^\mathcal{A} = \{0\}$ und $Q^\mathcal{A} = \emptyset$. Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$, denn $\mathcal{A} \models \forall x(x \neq y \rightarrow \neg P(x))$, weil $|\mathcal{U}_\mathcal{A}| = 1$. Des Weiteren gilt $\mathcal{A} \models \neg Q(y,y)$. Außerdem gilt, dass $\mathcal{A} \models \forall x(P(x) \vee Q(x,y))$, denn $\mathcal{A}_{[x/0]} \models P(x)$. Sei $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $P^\mathcal{B} = Q^\mathcal{B} = \emptyset$ und $y^\mathcal{B} = 0$. Dann gilt $\mathcal{B} \not\models F_b$, weil $\mathcal{B} \not\models \forall x(P(x) \vee Q(x,y))$.

**Aufgabe 7**
Zeigen Sie folgende Behauptungen für beliebige Formeln $F$ und $G$.

(a) $(\exists x F \vee \forall x G) \models \exists x(F \vee G)$

**Lösung**
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu $F$ und $G$ passend ist, und gelte $\mathcal{A} \models (\exists x F \vee \forall x G)$. D.h. $\mathcal{A} \models \exists x F$ oder $\mathcal{A} \models \forall x G$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Im Fall, dass $\mathcal{A} \models \exists x F$, gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Zusammen gilt dann, dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$, also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Im anderen Fall gilt $\mathcal{A} \models \forall x G$. Weil $|\mathcal{U}_\mathcal{A}| \neq \emptyset$, gilt auch $\mathcal{A} \models \exists x G$. Analog zum ersten Fall erhalten wir auch hier, dass $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$.

(b) $(\forall x F \wedge \forall x G) \models \forall x(F \wedge G)$

**Lösung**
Sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Struktur mit $\mathcal{A} \models (\forall x F \wedge \forall x G)$. D.h. $\mathcal{A} \models \forall x F$ und $\mathcal{A} \models \forall x G$. Also gilt für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Damit gilt für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Somit gilt für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \wedge G)$, also auch $\mathcal{A} \models \forall x(F \wedge G)$.

(c) $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$

**Lösung**
Sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ passende Struktur mit $\mathcal{A} \models \exists y \forall x F$. D.h. es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[y/d]} \models \forall x F$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ so, dass für alle $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}_{[y/d][x/d']} \models F$. Für alle $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt es also ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d'][y/d]} \models F$. D.h. für alle $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}_{[x/d']} \models \exists y F$, also $\mathcal{A} \models \forall x \exists y F$.

(d) $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$

**Lösung**
Sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ passende Struktur. Es gilt $\mathcal{A} \models \neg \exists x \neg F$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \not\models \exists x \neg F$. Dies gilt genau dann, wenn es kein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models \neg F$. Dies gilt genau dann, wenn es kein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \not\models F$. Dies wiederum gilt genau dann, wenn für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$. Dies gilt genau dann, wenn $\mathcal{A} \models \forall x F$.

(e) $\forall x \exists y F \not\equiv \exists x \forall y F$

**Lösung**
Sei $F = R(x, y)$. Sei außerdem $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ mit $R^\mathcal{B} = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Es gilt $\mathcal{B} \models \forall x \exists y R(x, y)$, denn $\mathcal{B}_{[x/0][y/1]} \models R(x, y)$ und $\mathcal{B}_{[x/1][y/0]} \models R(x, y)$. Es gilt aber nicht $\mathcal{B} \models \exists x \forall y R(x, y)$, weil $\mathcal{B}_{[x/0][y/0]} \not\models R(x, y)$ und $\mathcal{B}_{[x/1][y/1]} \not\models R(x, y)$.

**Aufgabe 8**
Geben Sie für die folgende Formel zunächst eine zu ihr äquivalente BPF an. Überführen Sie diese anschließend in Skolemform.

$$\begin{aligned} G = \Big(&\forall x \forall y \forall z\big((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)\big) \\ &\wedge \forall x \neg R(x, x) \wedge \exists x \forall y(x \neq y \rightarrow R(y, x)) \wedge \forall x \exists y R(y, x)\Big) \end{aligned}$$

**Lösung**
Umbenennen aller Quantoren:

$$\begin{aligned} G \equiv \Big(&\forall x_1 \forall y_1 \forall z_1\big((R(x_1, y_1) \wedge R(y_1, z_1)) \rightarrow R(x_1, z_1)\big) \\ &\wedge \forall x_2 \neg R(x_2, x_2) \wedge \exists x_3 \forall y_2(x_3 \neq y_2 \rightarrow R(y_2, x_3)) \wedge \forall x_4 \exists y_3 R(y_3, x_4)\Big) \end{aligned}$$

Umwandeln in Grundform mit $\land$, $\lor$, $\neg$:

$$G \equiv \Big(\forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 \big((\neg R(x_1, y_1) \lor \neg R(y_1, z_1)) \lor R(x_1, z_1)\big)$$
$$\land \forall x_2 \neg R(x_2, x_2) \land \exists x_3 \forall y_2 (x_3 = y_2 \lor R(y_2, x_3)) \land \forall x_4 \exists y_3 R(y_3, x_4)\Big)$$

Quantoren nach vorne ziehen:

$$G \equiv \forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall y_2 \forall x_4 \exists y_3 \Big(\big((\neg R(x_1, y_1) \lor \neg R(y_1, z_1)) \lor R(x_1, z_1)\big)$$
$$\land \neg R(x_2, x_2) \land (x_3 = y_2 \lor R(y_2, x_3)) \land R(y_3, x_4)\Big)$$

Umwandeln in Skolemform:

$$\forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 \forall x_2 \forall y_2 \forall x_4 \Big(\big((\neg R(x_1, y_1) \lor \neg R(y_1, z_1)) \lor R(x_1, z_1)\big)$$
$$\land \neg R(x_2, x_2)$$
$$\land (f_{x_3}(x_1, y_1, z_1, x_2) = y_2 \lor R(y_2, f_{x_3}(x_1, y_1, z_1, x_2)))$$
$$\land R(f_{y_3}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x_4), x_4)\Big)$$

**Aufgabe 9**
Wandeln Sie die folgende Formel $F$ in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform (Skolemform mit Matrix in KNF) um. Geben Sie dazu Zwischenschritte (BPF und Skolemform) an.

$$F = (\forall x P(x) \lor \forall y (P(x) \land \neg \forall x Q(x, y)))$$

**Lösung**
BPF:

$$\forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 (P(x_1) \lor (P(x) \land \neg Q(x_2, y_1)))$$

Aussage in Skolemform:

$$\forall x_1 \forall y_1 (P(x_1) \lor (P(a_x) \land \neg Q(f_{x_2}(x_1, y_1), y_1)))$$

Aussage in Klauselform:

$$\forall x_1 \forall y_1 ((P(x_1) \lor P(a_x)) \land (P(x_1) \lor \neg Q(f_{x_2}(x_1, y_1), y_1)))$$

## Aufgaben zur Unifikation (für Logik 1, nicht für BUL!)

**Aufgabe 10**
Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgenden Literalmengen an.

**Lösung**
Wir schreiben $\emptyset$ für die Substitution sub mit $\mathrm{Def}(\mathrm{sub}) = \emptyset$. Das heißt also, dass sub keine Ersetzungen vornimmt. Außerdem schreiben wir $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ für die Substitution sub mit $\mathrm{Def}(\mathrm{sub}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\mathrm{sub}(x_i) = t_i$ für $1 \leq i \leq n$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind.

(a) $L_a = \{P(f(x), g(f(y))), P(f(g(z)), g(w))\}$

**Lösung**
Wir starten mit sub $= \emptyset$. Danach wählen wir in jedem Schritt zwei Elemente aus $L_a$sub. Diese gehen wir zeichenweise von links nach rechts durch, bis wir das erste Symbol finden, an denen sich die beiden unterscheiden. Um diese Positionen hervorzuheben, markieren wir sie mit einem $\uparrow$.

- Wähle $P(f(\underset{\uparrow}{x}), g(f(y)))$ und $P(f(\underset{\uparrow}{g}(z)), g(w))$. Wir erhalten sub $:=$ sub$[x/g(z)]$ und $L_a$sub $= \{P(f(g(z)), g(f(y))), P(f(g(z)), g(w))\}$.
- Wähle $P(f(g(z)), g(\underset{\uparrow}{f}(y)))$ und $P(f(g(z)), g(\underset{\uparrow}{w}))$. Wir erhalten also, dass

$$\begin{aligned} \text{sub} &:= \text{sub}[w/f(y)] = [x/g(z), w/f(y)] \text{ und} \\ L_a\text{sub} &= \{P(f(g(z)), g(f(y)))\}. \end{aligned}$$

Da nun $|L_a\text{sub}| = 1$, ist die Unifikation fertig.

(b) $L_b = \{P(x, f(x)), P(f(y), y)\}$

**Lösung**
sub $= \emptyset$.

- $P(\underset{\uparrow}{x}, f(x))$ und $P(\underset{\uparrow}{f}(y), y)$,
  sub $:=$ sub$[x/f(y)]$,
  $L_b$sub $= \{P(f(y), f(f(y))), P(f(y), y)\}$.
- $P(f(y), \underset{\uparrow}{f}(f(y)))$ und $P(f(y), \underset{\uparrow}{y})$.
  Da $y$ in $f(f(y))$ vorkommt, ist die Menge nicht unifizierbar.

(c) $L_c = \{P(f(x), g(x)), P(y, g(f(z))), P(w, g(x))\}$

**Lösung**
sub $= \emptyset$.

- $P(\underset{\uparrow}{y}, g(f(z)))$ und $P(\underset{\uparrow}{w}, g(x))$,
  sub $:=$ sub$[y/w]$,
  $L_c$sub $= \{P(f(x), g(x)), P(w, g(f(z))), P(w, g(x))\}$.
- $P(w, g(\underset{\uparrow}{f}(z)))$ und $P(w, g(\underset{\uparrow}{x}))$,
  sub $:=$ sub$[x/f(z)] = [y/w, x/f(z)]$,
  $L_c$sub $= \{P(f(f(z)), g(f(z))), P(w, g(f(z)))\}$.

- $P(\underset{\uparrow}{f}(f(z)), g(f(z)))$ und $P(\underset{\uparrow}{w}, g(f(z)))$,
  $\text{sub} := \text{sub}[w/f(f(z))] = [y/f(f(z)), x/f(z), w/f(f(z))]$,
  $L_c\text{sub} = \{P(f(f(z)), g(f(z)))\}$.

Da nun $|L_c\text{sub}| = 1$, ist die Unifikation fertig.

(d) $L_d = \{P(x), P(f(y)), P(g(z))\}$

**Lösung**
$\text{sub} = \emptyset$.

- $P(\underset{\uparrow}{f}(y))$ und $P(\underset{\uparrow}{g}(z))$.
  Keines der beiden Symbole ist eine Variable, also ist die Menge nicht unifizierbar.