# Klausur zur Vorlesung „Berechenbarkeit und Logik“

## WS 2022/23 / 27. Februar 2023

**Vorname:** ______________________________

**Nachname:** ______________________________

**Matrikelnummer:** ______________________________

| **Aufgabe** | **Punktzahl** | **Erreicht** |
|---|---|---|
| 1 | 10 | |
| 2 | 5 | |
| 3 | 3 | |
| 4 | 5 | |
| 5 | 2 | |
| 6 | 5 | |
| 7 | 6 | |
| 8 | 6 | |
| 9 | 8 | |
| 10 | 6 | |
| 11 | 6 | |
| 12 | 8 | |
| $\boldsymbol{\Sigma}$ | 70 | |

## Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **35 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**12 Aufgaben** auf 11 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

## Inhaltliche Hinweise:

- In den While- und Loop-Programmen dürfen Sie die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte Subtraktion und für eine Variable $x$ die Bedingung If $x = 0$ Then $P$ End als While- bzw. Loop-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von $\mu$- bzw. primitiv-rekursiven Funktionen und für While- und Loop-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

**Aufgabe 1.** (10 Punkte) Beantworten Sie die folgenden zehn Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

(1) Welche der folgenden Eigenschaften sind jeweils äquivalent?
1. semi-entscheidbar, 2. Loop-berechenbar, 3. rekursiv aufzählbar, 4. primitiv rekursiv, 5. While-berechenbar, 6. unentscheidbar, 7. $\mu$-rekursiv

(2) Zu welchem Problem zeigt der Algorithmus von Gilmore, dass dieses Problem semi-entscheidbar ist?

(3) Ist das folgende Problem semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort!
**Gegeben:** Eine aussagenlogische Formel $F$.
**Frage:** Ist $F$ erfüllbar?

(4) Gibt es Funktion $f$, die primitiv rekursiv ist, und für die $\mu f$ nicht total, aber While-berechenbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(5) Nennen Sie ein unentscheidbares Problem. Erklären Sie, welche Fragestellung bei diesem Problem betrachtet wird.

**Aufgabe 2.** (5 Punkte) Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die folgende Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ berechnet:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} F_x, & \text{falls } y = z, \\ F_{|z-y|} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet $F_n$ die $n$-te Fibonacci Zahl, d.h. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Kommentieren Sie neben Ihrer Lösung kurz, was Ihre Teilprogramme ausgeben (Beispiel: [Ihr Code für $\min(x,y)$] - „Berechnung von $\min(x,y)$“).

**Aufgabe 3.** (3 Punkte) Geben Sie an, welche partielle Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ das folgende GoTo-Programm berechnet (Eingabevariablen sind $x_1$ und $x_2$, die Ausgabevariable ist $x_1$):

$$
\begin{array}{ll}
M_1: & x_3 := x_1 + x_2\,; \\
 & \textsc{GoTo}\ M_2\,; \\
M_2: & \textsc{If}\ x_3 = 0\ \textsc{Then}\ \textsc{GoTo}\ M_3\,; \\
 & x_3 := x_3 - 1\,; \\
 & \textsc{If}\ x_3 = 0\ \textsc{Then}\ \textsc{GoTo}\ M_4\,; \\
 & x_3 := x_3 - 1\,; \\
 & \textsc{GoTo}\ M_2\,; \\
M_3: & \textsc{GoTo}\ M_3\,; \\
M_4: & x_1 := x_3 + x_3\,; \\
 & \text{HALT}
\end{array}
$$

**Aufgabe 4.** Sei $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eine beliebige primitiv-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen ebenfalls primitiv-rekursiv sind.

(a) (2 Punkte) $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x, y) = (h(x, y))!$

(b) (3 Punkte) $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $g(x, y, z) = \sum_{k=0}^{x}(h(y, k) + k \cdot h(k, z))$

**Aufgabe 5.** (2 Punkte) Geben Sie an, welche Funktion von $\mu f$ berechnet wird, wobei $f$ wie folgt definiert ist:

$$f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \text{ mit } f(n, x, y) = x + n \cdot 2^y$$

**Aufgabe 6.** (5 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = 2n \cdot (n \bmod 2).$$

Geben Sie eine Turingmaschine an, die $f$ berechnet.

*Hinweis:* Beachten Sie, dass die Eingabezahl $n$ zu Beginn als Binärzahl auf dem Band steht (zum Beispiel steht bei $n = 5$ zu Beginn 101 auf dem Band). Außerdem gilt hier $(n \bmod 2) \in \{0, 1\}$, es soll kein anderer Repräsentant der Restklasse verwendet werden!

Achten Sie darauf, dass der Leseschreibkopf am Ende auf dem ersten Zeichen der Ausgabe steht.

**Aufgabe 7.** (6 Punkte) Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Formel gültig ist:

$$F = (C \wedge \neg B) \vee D \vee (\neg A \wedge C \wedge B) \vee (B \wedge A \wedge \neg D \wedge E) \vee \neg C \vee (B \wedge A \wedge \neg E)$$

Geben Sie an, welche atomaren Formeln in jedem Schritt markiert werden, jeweils mit Begründung.

**Aufgabe 8.** (6 Punkte) Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg C, E, B\}, \{D, A, C\}, \{\neg C, \neg E\}, \{\neg D, C\}, \{\neg A\}, \{\neg C, \neg B\}\}$$

**Aufgabe 9.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) (2 Punkte) Sei $F$ eine prädikatenlogische Formel, dann ist entweder $F$ gültig, oder $\neg F$ ist gültig.

(b) (2 Punkte) Es gibt eine prädikatenlogische Formel $F$, sodass $F \equiv \neg F$.

(c) (2 Punkte) $\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow P(f(x), f(y))) \models \forall y \forall x(P(f(x), f(y)) \rightarrow P(x,y))$

(d) (2 Punkte) $\forall x \exists y(P(x) \vee \neg P(y)) \equiv \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

**Aufgabe 10.** Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind:

(a) (3 Punkte) $F = \forall x \forall y (R(x, y, f(x, y)) \land \neg R(f(x, y), x, y) \land \neg R(x, f(x, y), y))$

(b) (3 Punkte) $G = (\forall x \forall y (P(g(x), y) \rightarrow P(x, y)) \land \forall z P(z, g(z)) \land \neg P(a, b))$

**Aufgabe 11.** (6 Punkte) Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgende Literalmenge $L$ an. Geben Sie in jedem Schritt an, welche Literale Sie unifizieren. Geben Sie außerdem in jedem Schritt die Substitution und die Literalmenge an, die Sie erhalten.

$$L = \{P(y, g(x), g(z)), P(f(w), z, g(f(w))), P(f(g(x)), w, g(y))\}$$

**Aufgabe 12.** Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, wobei das Universum gegeben ist durch

$$U_\mathcal{A} = \{F \mid F \text{ ist eine prädikatenlogische Formel}\}$$

und die Interpretationsfunktion $I_\mathcal{A}$ definiert ist durch:

- $P^\mathcal{A} = \{F \mid F \text{ ist erfüllbar}\}$,
- $R^\mathcal{A} = \{F \mid F \text{ ist gültig}\}$,
- $Q^\mathcal{A} = \{F \mid F \text{ ist in bereinigter Pränexform}\}$,
- $S^\mathcal{A} = \{(F, G) \mid F \text{ ist logisch äquivalent zu } G\}$,
- $f^\mathcal{A}(F) = \neg F$,
- $a^\mathcal{A} = \exists x P(x)$.

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als prädikatenlogische Formeln:

(a) (2 Punkte) Es gibt eine prädikatenlogische Formel, die in bereinigter Pränexform ist, und deren Negation nicht erfüllbar ist.

(b) (2 Punkte) Die Formel $\exists x P(x)$ ist erfüllbar, aber nicht gültig.

(c) (2 Punkte) Die Negation einer jeden gültigen prädikatenlogischen Formel ist unerfüllbar.

(d) (2 Punkte) Zu jeder prädikatenlogischen Formel existiert eine logisch äquivalente prädikatenlogische Formel in bereinigter Pränexform.