Klausur zur Vorlesung „Berechenbarkeit und Logik“

WS 2022/23 / 27. Februar 2023

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	10	
2	5	
3	3	
4	5	
5	2	
6	5	
7	6	
8	6	
9	8	
10	6	
11	6	
12	8	
Σ	70	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **35 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**12 Aufgaben** auf 11 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

Inhaltliche Hinweise:

- In den WHILE- und LOOP-Programmen dürfen Sie die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte Subtraktion und für eine Variable x die Bedingung IF $x = 0$ THEN P END als WHILE- bzw. LOOP-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von μ- bzw. primitiv-rekursiven Funktionen und für WHILE- und LOOP-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Beantworten Sie die folgenden zehn Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

(1) Welche der folgenden Eigenschaften sind jeweils äquivalent?
1. semi-entscheidbar, 2. LOOP-berechenbar, 3. rekursiv aufzählbar, 4. primitiv rekursiv, 5. WHILE-berechenbar, 6. unentscheidbar, 7. μ-rekursiv

> **Lösung:** WHILE-berechenbar und μ-rekursiv
> semi-entscheidbar und rekursiv aufzählbar
> LOOP-berechenbar und primitiv rekursiv

(2) Zu welchem Problem zeigt der Algorithmus von Gilmore, dass dieses Problem semi-entscheidbar ist?

> **Lösung:** Zu dem Problem
> **Gegeben:** Eine prädikatenlogische Formel F
> **Frage:** Ist F unerfüllbar?

(3) Ist das folgende Problem semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort!
Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F.
Frage: Ist F erfüllbar?

> **Lösung:** Das Problem ist entscheidbar (und damit auch semi-entscheidbar). Sei n die Anzahl der atomaren Formeln, die in F vorkommen. Dann enthält die Wahrheitstafel für F 2^n viele Zeilen. Stelle die Wahrheitstafel zu F auf (in endlicher Zeit) und prüfe, ob sich F für eine der Belegungen zu 1 auswertet.

(4) Gibt es Funktion f, die primitiv rekursiv ist, und für die μf nicht total, aber WHILE-berechenbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

> **Lösung:** Ja: Nehme $f(n, x, y) = x+y+n+1$, dann ist μf überall undefiniert und WHILE-berechenbar.

(5) Nennen Sie ein unentscheidbares Problem. Erklären Sie, welche Fragestellung bei diesem Problem betrachtet wird.

> **Lösung:** Z.B. das Halteproblem:
> **Gegeben:** Eine deterministische Turing-Maschine M und ein Wort w
> **Frage:** Hält M auf w?

Aufgabe 2. (5 Punkte) Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die folgende Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ berechnet:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} F_x, & \text{falls } y = z, \\ F_{|z-y|} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet F_n die n-te Fibonacci Zahl, d.h. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Kommentieren Sie neben Ihrer Lösung kurz, was Ihre Teilprogramme ausgeben (Beispiel: [Ihr Code für $\min(x,y)$] - „Berechnung von $\min(x,y)$“).

Lösung: Eingabe x_1, x_2, x_3, Ausgabe in x_1

$x_4 := x_2 - x_3;$
$x_5 := x_3 - x_2;$
$x_6 := 0;$
IF $x_4 = 0$ THEN $x_6 := \text{Fib}(x_5)$ END;
IF $x_5 = 0$ THEN $x_6 := \text{Fib}(x_4)$ END;
$x_7 := x_4 + x_5;$
IF $x_7 = 0$ THEN $x_6 := \text{Fib}(x_1)$ END;
$x_1 := x_6$

Und das Programm $\text{Fib}(x_i)$ ist definiert durch (Ein- und Ausgabe x_i)

$y_0 := 0;$
$y_1 := 1;$
$y_2 := 0;$
LOOP x_i DO
  $y_2 := y_1 + y_0;$
  $y_0 := y_1;$
  $y_1 := y_2$
END;
$x_i := y_0$

Erläuterungen:

Ist $y - z < 0$, so wird in x_6 der Wert F_{z-y} gespeichert.
Ist $z - y < 0$, so wird in x_6 der Wert F_{y-z} gespeichert.
Sind $y - z$ und $z - y$ beide gleich 0, so ist die Ausgabe F_x.

Bei der Funktion Fib steht der Wert $\text{Fib}(x_i)$ nach jeder Iteration stehts in y_0.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Geben Sie an, welche partielle Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ das folgende GoTo-Programm berechnet (Eingabevariablen sind x_1 und x_2, die Ausgabevariable ist x_1):

$$
\begin{array}{ll}
M_1: & x_3 := x_1 + x_2\,; \\
 & \textsc{GoTo}\ M_2\,; \\
M_2: & \textsc{If}\ x_3 = 0\ \textsc{Then}\ \textsc{GoTo}\ M_3\,; \\
 & x_3 := x_3 - 1\,; \\
 & \textsc{If}\ x_3 = 0\ \textsc{Then}\ \textsc{GoTo}\ M_4\,; \\
 & x_3 := x_3 - 1\,; \\
 & \textsc{GoTo}\ M_2\,; \\
M_3: & \textsc{GoTo}\ M_3\,; \\
M_4: & x_1 := x_3 + x_3\,; \\
 & \text{HALT}
\end{array}
$$

Lösung:

$$
f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x + y \text{ ungerade,} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Aufgabe 4. Sei $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eine beliebige primitiv-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen ebenfalls primitiv-rekursiv sind.

(a) (2 Punkte) $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x,y) = (h(x,y))!$

Lösung: Mit $f'(n) = n!$ gilt

$$f'(0) = 1$$
$$f'(n+1) = f'(n) \cdot s(n),$$

daher ist f' primitiv-rekursiv. Durch Einsetzung erhalten wir $f(x,y) = f'(h(x,y))$.

(b) (3 Punkte) $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $g(x,y,z) = \sum_{k=0}^{x}(h(y,k) + k \cdot h(k,z))$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} g(0,y,z) &= h(y,0) \\ g(x+1,y,z) &= g(x,y,z) + h(y,x+1) + (x+1) \cdot h(x+1,z) \\ &= g(x,y,z) + h(y,s(x)) + s(x) \cdot h(s(x),z), \end{aligned}$$

daher ist g primitiv-rekursiv.

Aufgabe 5. (2 Punkte) Geben Sie an, welche Funktion von μf berechnet wird, wobei f wie folgt definiert ist:

$$f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \text{ mit } f(n,x,y) = x + n \cdot 2^y$$

Lösung: $\mu f(x,y) = \begin{cases} \text{undefiniert}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 6. (5 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = 2n \cdot (n \bmod 2).$$

Geben Sie eine Turingmaschine an, die f berechnet.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Eingabezahl n zu Beginn als Binärzahl auf dem Band steht (zum Beispiel steht bei $n = 5$ zu Beginn 101 auf dem Band). Außerdem gilt hier $(n \bmod 2) \in \{0, 1\}$, es soll kein anderer Repräsentant der Restklasse verwendet werden!

Achten Sie darauf, dass der Leseschreibkopf am Ende auf dem ersten Zeichen der Ausgabe steht.

Lösung: Falls n ungerade ist, soll an die Binärdarstellung von n eine 0 angehangen werden. Falls n gerade ist, gilt $f(0) = 0$. Die Turingmaschine überprüft also zunächst, ob das letzte Zeichen eine 0 oder eine 1 ist.

$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_f\})$

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, x) &= \{(z_0, x, R)\}, \quad x \in \{0, 1\} \\
\delta(z_0, \Box) &= \{(z_1, \Box, L)\} \\
\delta(z_1, 1) &= \{(z_2, 1, R)\} \\
\delta(z_2, \Box) &= \{(z_3, 0, L)\} \\
\delta(z_3, x) &= \{(z_3, x, L)\}, \quad x \in \{0, 1\} \\
\delta(z_3, \Box) &= \{(z_f, \Box, R)\} \\
\delta(z_1, 0) &= \{(z_4, \Box, L)\} \\
\delta(z_4, x) &= \{(z_4, \Box, L)\}, \quad x \in \{0, 1\} \\
\delta(z_4, \Box) &= \{(z_f, 0, N)\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. (6 Punkte) Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Formel gültig ist:

$$F = (C \wedge \neg B) \vee D \vee (\neg A \wedge C \wedge B) \vee (B \wedge A \wedge \neg D \wedge E) \vee \neg C \vee (B \wedge A \wedge \neg E)$$

Geben Sie an, welche atomaren Formeln in jedem Schritt markiert werden, jeweils mit Begründung.

Lösung: Dies gilt genau dann, wenn

$$\neg F \equiv (C \to B) \wedge (D \to 0) \wedge (C \wedge B \to A) \wedge (B \wedge A \wedge E \to D) \wedge (1 \to C) \wedge (B \wedge A \to E)$$

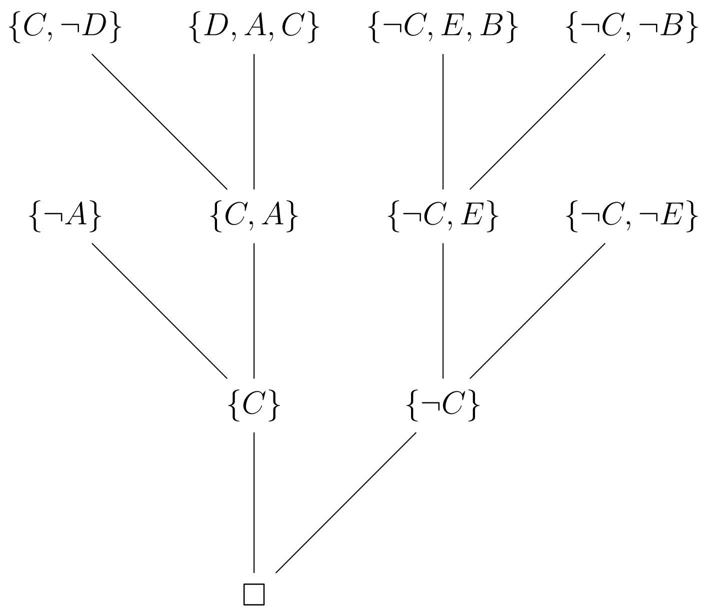
unerfüllbar ist.

- Markiere C wegen $1 \to C$.
- Markiere B weil C markiert und $C \to B$.
- Markiere A, weil C und B markiert und $C \wedge B \to A$.
- Markiere E, weil B und A markiert und $B \wedge A \to E$.
- Markiere D, weil A und B und E markiert und $B \wedge A \wedge E \to D$.
- Gib unerfüllbar aus, weil D markiert und $D \to 0$.

Aufgabe 8. (6 Punkte) Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg C, E, B\}, \{D, A, C\}, \{\neg C, \neg E\}, \{\neg D, C\}, \{\neg A\}, \{\neg C, \neg B\}\}$$

Lösung:



Aufgabe 9. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) (2 Punkte) Sei F eine prädikatenlogische Formel, dann ist entweder F gültig, oder $\neg F$ ist gültig.

Lösung: Falsch: Sei $F = \exists x P(x)$, dann ist F nicht gültig und $\neg F$ ist auch nicht gültig (+ Strukturen angeben, in denen sich F bzw $\neg F$ zu falsch auswerten).

(b) (2 Punkte) Es gibt eine prädikatenlogische Formel F, sodass $F \equiv \neg F$.

Lösung: Falsch: Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F passend ist. Nach Definition der Auswertung einer Formel in einer Struktur gilt, dass $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ falls $\mathcal{A}(F) = 0$ und $\mathcal{A}(\neg F) = 0$ falls $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit $F \equiv \neg F$ gilt, muss aber $\mathcal{A}(\neg F) = \mathcal{A}(F)$ für jede Struktur $\mathcal{A}$ gelten – das ist also nicht möglich.

(c) (2 Punkte) $\forall x \forall y (P(x,y) \to P(f(x), f(y))) \models \forall y \forall x (P(f(x), f(y)) \to P(x,y))$

Lösung: Falsch: Sei $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $P^{\mathcal{A}} = \{(x,y) \mid x+y > 2\}$, $f^{\mathcal{A}}(x) = x+5$, dann gilt $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (P(x,y) \to P(f(x), f(y)))$, aber $\mathcal{A} \not\models \forall y \forall x (P(f(x), f(y)) \to P(x,y)))$.

(d) (2 Punkte) $\forall x \exists y (P(x) \vee \neg P(y)) \equiv \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$

Lösung: Wahr: Die rechte Seite $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$ ist offensichtlich gültig. Es genügt also zu zeigen, dass die linke Seite $\forall x \exists y (P(x) \vee \neg P(y))$ auch gültig ist. Die linke Seite ist logisch äquivalent zu $(\forall x P(x) \vee \exists y \neg P(y))$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine zu $(\forall x P(x) \vee \exists y \neg P(y))$ passende Struktur. Dann gibt es ein $d \in U_{\mathcal{A}}$, sodass $\mathcal{A}_{[y/d]} \models \neg P(y)$, oder es gilt für alle $d \in U_{\mathcal{A}}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models P(x)$. Also gilt $\mathcal{A} \models (\forall x P(x) \vee \exists y \neg P(y))$. Daraus folgt nun die Behauptung.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind:

(a) (3 Punkte) $F = \forall x \forall y (R(x, y, f(x, y)) \wedge \neg R(f(x, y), x, y) \wedge \neg R(x, f(x, y), y))$

> **Lösung:** Sei $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}}(x, y) = x + y + 1$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x, y, z) \mid z > x + y\}$, dann gilt $\mathcal{A} \models F$, also ist F erfüllbar.
> Sei $U_{\mathcal{A}} = \{0\}$, $f^{\mathcal{A}}(x, y) = 0$, $R^{\mathcal{A}} = \emptyset$, dann gilt $\mathcal{A} \not\models F$, also ist F nicht gültig.

(b) (3 Punkte) $G = (\forall x \forall y (P(g(x), y) \rightarrow P(x, y)) \wedge \forall z P(z, g(z)) \wedge \neg P(a, b))$

> **Lösung:** Sei $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $g^{\mathcal{A}}(x) = x^2$, $P^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$, $a^{\mathcal{A}} = 25$, $b^{\mathcal{A}} = 4$, dann gilt $\mathcal{A} \models G$, also ist G erfüllbar.
> Sei $U_{\mathcal{A}} = \{0\}$, $g^{\mathcal{A}}(x) = x$, $P^{\mathcal{A}} = \{(0, 0)\}$, $a^{\mathcal{A}} = b^{\mathcal{A}} = 0$, dann gilt $\mathcal{A} \not\models G$, also ist G nicht gültig.

Aufgabe 11. (6 Punkte) Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgende Literalmenge L an. Geben Sie in jedem Schritt an, welche Literale Sie unifizieren. Geben Sie außerdem in jedem Schritt die Substitution und die Literalmenge an, die Sie erhalten.

$$L = \{P(y, g(x), g(z)), P(f(w), z, g(f(w))), P(f(g(x)), w, g(y))\}$$

Lösung: $\text{sub} := \emptyset$.

- $P(y, g(x), g(z))$ und $P(f(w), z, g(f(w)))$,
  $\text{sub} := \text{sub}[y/f(w)] = [y/f(w)]$,
  $L\text{sub} = \{P(f(w), g(x), g(z)), P(f(w), z, g(f(w))), P(f(g(x)), w, g(f(w)))\}$
- $P(f(w), g(x), g(z))$ und $P(f(w), z, g(f(w)))$
  $\text{sub} := \text{sub}[z/g(x)] = [y/f(w), z/g(x)]$
  $L\text{sub} = \{P(f(w), g(x), g(g(x))), P(f(w), g(x), g(f(w))), P(f(g(x)), w, g(f(w)))\}$
- $P(f(w), g(x), g(g(x)))$ und $P(f(w), g(x), g(f(w)))$
  Die Literalmenge ist nicht unifizierbar: An der ersten Position, an der sich die Literale unterscheiden, befinden sich zwei unterschiedliche Funktionssymbole. Gib also „nicht unifizierbar“ aus.

Aufgabe 12. Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, wobei das Universum gegeben ist durch

$$U_\mathcal{A} = \{F \mid F \text{ ist eine prädikatenlogische Formel}\}$$

und die Interpretationsfunktion $I_\mathcal{A}$ definiert ist durch:

- $P^\mathcal{A} = \{F \mid F \text{ ist erfüllbar}\}$,
- $R^\mathcal{A} = \{F \mid F \text{ ist gültig}\}$,
- $Q^\mathcal{A} = \{F \mid F \text{ ist in bereinigter Pränexform}\}$,
- $S^\mathcal{A} = \{(F, G) \mid F \text{ ist logisch äquivalent zu } G\}$,
- $f^\mathcal{A}(F) = \neg F$,
- $a^\mathcal{A} = \exists x P(x)$.

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als prädikatenlogische Formeln:

(a) (2 Punkte) Es gibt eine prädikatenlogische Formel, die in bereinigter Pränexform ist, und deren Negation nicht erfüllbar ist.

Lösung: $\exists x(Q(x) \land \neg P(f(x)))$

(b) (2 Punkte) Die Formel $\exists x P(x)$ ist erfüllbar, aber nicht gültig.

Lösung: $P(a) \land \neg R(a)$

(c) (2 Punkte) Die Negation einer jeden gültigen prädikatenlogischen Formel ist unerfüllbar.

Lösung: $\forall x(R(x) \to \neg P(f(x)))$

(d) (2 Punkte) Zu jeder prädikatenlogischen Formel existiert eine logisch äquivalente prädikatenlogische Formel in bereinigter Pränexform.

Lösung: $\forall x \exists y(S(x, y) \land Q(y))$