Prüfung zur Vorlesung „Logik I“

WS 2020/21 / 15. März 2021

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	**Punktzahl**	**Erreicht**
1	6	
2	6	
3	6	
4	8	
5	6	
6	8	
$\boldsymbol{\Sigma}$	40	

Hinweise

- Prüfungsdauer: **60 Minuten**. Die Prüfung findet als Take-Home-Exam von **12 bis 13 Uhr** statt.
- Fertigen Sie bitte Ihre Lösungen handschriftlich an. Sie können einfarbig weiße, linierte oder karierte DIN-A4-Blätter verwenden oder die Prüfung ausdrucken.
- Notieren Sie bitte **auf jedem Blatt**, das Sie verwenden, Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Aufgabe**, die Sie bearbeiten.
- Die fertigen Lösungen **scannen oder fotografieren** Sie. Achten Sie auf gute Lesbarkeit. Wir empfehlen die kostenlose App Adobe Scan zum Einscannen der Seiten.
- Ihre Lösungen müssen bis **spätestens 14:20 Uhr** am 15. März 2021 (heute) bei einer der folgenden Adressen ankommen:
  (a) michael.figelius@uni-siegen.de (Nachname A-I),
  (b) reh@eti.uni-siegen.de (Nachname J-R),
  (c) seelbach@eti.uni-siegen.de (Nachname S-Z).
- Zusammen mit Ihren Lösungen schicken Sie eine ausgefüllte und unterschriebene Erklärung über die eigenständige Erbringung der Prüfungsleistung.
- Alle Hilfsmittel sind erlaubt bis auf die Hilfestellung durch eine andere Person.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

$$F = (A \wedge D \to E) \wedge (A \wedge B \to C) \wedge (1 \to B) \wedge (E \to 0) \wedge (1 \to A) \wedge (C \to D)$$

Geben Sie an, welche atomaren Formeln in jedem Schritt markiert werden, jeweils mit Begründung.

Lösung:

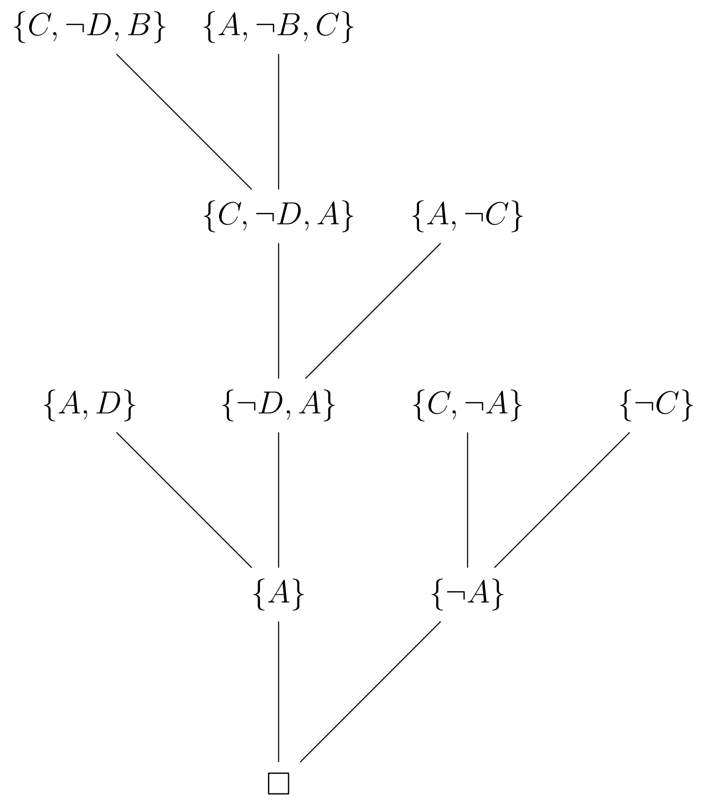
- Markiere B wegen $1 \to B$ und markiere A wegen $1 \to A$.
- Markiere C, weil A und B markiert und $A \wedge B \to C$.
- Markiere D, weil C markiert und $C \to D$.
- Markiere E, weil A und D markiert und $A \wedge D \to E$.
- Gib unerfüllbar aus, weil E markiert und $E \to 0$.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{C, \neg D, B\}, \{B, \neg B\}, \{A, \neg C\}, \{C, \neg A\}, \{A, \neg B, C\}, \{\neg C\}, \{A, D\}\}$$

Lösung:



Aufgabe 3. (6 Punkte)
Gegeben sei folgende Formel F:

$$F = (\forall x Q(x, y) \vee \forall y \neg (P(x) \vee \forall x Q(x, y)))$$

Wandeln Sie F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform (Skolemform mit Matrix in KNF) um.

Lösung: BPF:

$$\forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 (Q(x_1, y) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x_2, y_1)))$$

Aussage in Skolemform:

$$\forall x_1 \forall y_1 (Q(x_1, a_y) \vee (\neg P(a_x) \wedge \neg Q(f_{x_2}(x_1, y_1), y_1)))$$

Aussage in Klauselform:

$$\forall x_1 \forall y_1 ((Q(x_1, a_y) \vee \neg P(a_x)) \wedge (Q(x_1, a_y) \vee \neg Q(f_{x_2}(x_1, y_1), y_1)))$$

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Geben Sie ein Modell für folgende Formel an:

$$F = (\exists x R(f(x,a)) \wedge \forall y \neg R(f(y,b)))$$

Begründen Sie auch, warum Ihre Struktur ein Modell ist.

Lösung: Sei $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0,1\}$, $R^\mathcal{A} = \{0\}$, $a^\mathcal{A} = 0$, $b^\mathcal{A} = 1$ und $f^\mathcal{A}(x,y) = y$. Es gilt $\mathcal{A} \models \exists x R(f(x,a))$, weil $\mathcal{A}_{[x/0]} \models R(f(x,a))$, denn $\mathcal{A}_{[x/0]}(f(x,a)) = a^\mathcal{A} = 0 \in R^\mathcal{A}$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \forall y \neg R(f(y,b))$, weil $\mathcal{A}_{[y/d]} \models \neg R(f(y,b))$ für alle $d \in \{0,1\}$, denn $\mathcal{A}_{[y/d]}(f(y,b)) = b^\mathcal{A} = 1 \notin R^\mathcal{A}$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgende Literalmenge an:

$$L = \{P(g(x), f(y)), P(g(z), x), P(w, f(y))\}$$

Geben Sie in jedem Schritt an, welche Literale Sie unifizieren. Geben Sie außerdem in jedem Schritt die Substitution und die Literalmenge an, die Sie erhalten.

Lösung: sub $:= \emptyset$.

- $P(g(x), f(y))$ und $P(g(z), x)$,
  sub $:=$ sub$[x/z] = [x/z]$,
  Lsub $= \{P(g(z), f(y)), P(g(z), z), P(w, f(y))\}$.
- $P(g(z), f(y))$ und $P(g(z), z)$,
  sub $:=$ sub$[z/f(y)] = [x/f(y), z/f(y)]$,
  Lsub $= \{P(g(f(y)), f(y)), P(w, f(y))\}$.
- $P(g(f(y)), f(y))$ und $P(w, f(y))$,
  sub $:=$ sub$[w/g(f(y))] = [x/f(y), z/f(y), w/g(f(y))]$,
  Lsub $= \{P(g(f(y)), f(y))\}$.

Da $|L\text{sub}| = 1$, ist der Algorithmus fertig.

Aufgabe 6. (8 Punkte)
Zeigen Sie die folgende Behauptung:

$$\forall x P(x,a) \models \exists y P(y,y)$$

Lösung: Sei $\mathcal{A}$ eine zu $\forall x P(x,a)$ und $\exists y P(y,y)$ passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \forall x P(x,a)$. Das heißt, dass für alle $d \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ gilt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models P(x,a)$. Vor allem gilt also, dass $\mathcal{A}_{[x/a^{\mathcal{A}}]} \models P(x,a)$, also $(a^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}}) \in P^{\mathcal{A}}$. Damit gilt auch, dass $\mathcal{A}_{[y/a^{\mathcal{A}}]} \models P(y,y)$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ (nämlich $a^{\mathcal{A}}$) mit $\mathcal{A}_{[y/d]} \models P(y,y)$, also $\mathcal{A} \models \exists y P(y,y)$.