Prüfung zur Vorlesung „Logik I“

SS 2021 / 16. August 2021

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	**Punktzahl**	**Erreicht**
1	6	
2	6	
3	6	
4	8	
5	6	
6	8	
$\boldsymbol{\Sigma}$	40	

Hinweise

- Die Klausur findet als Take-Home-Exam **von 12:00 bis 13:00** (Dauer: **1 Stunde**) statt.
- Die Lösungen müssen mit der Hand geschrieben werden. Schreiben Sie bitte deutlich. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Es ist nicht notwendig, die Klausur auszudrucken: Sie können Ihre Lösungen gerne auf eigene (einfarbig weiße, linierte oder karierte) DIN-A4-Blätter schreiben.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, und der Aufgabennummer.
- Die fertigen Lösungen scannen oder fotografieren Sie. Achten Sie auf gute Lesbarkeit. Wir empfehlen die kostenlose App Adobe Scan zum Einscannen der Seiten. Senden Sie bitte Ihre Lösungen im PDF-Format.
- Alternativ können Sie die Lösungen auch direkt auf einem Tablet mit der Hand schreiben und uns das PDF schicken.
- Ihre Lösungen müssen bis spätestens 13:20 Uhr am 16. August 2021 (heute) bei folgender E-Mail-Adresse ankommen: reh@eti.uni-siegen.de.
- Zusammen mit Ihren Lösungen schicken Sie eine ausgefüllte und unterschriebene Erklärung über die eigenständige Erbringung der Prüfungsleistung, siehe `https://www.uni-siegen.de/zuv/dezernat3/abteilung_3_2/eigenstaendigkeitserklaerung_homepage_ab_18.02.2021.pdf`.
- Alle Hilfsmittel sind erlaubt, bis auf die Hilfestellung durch eine andere Person.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(B \land B \to A) \land (1 \to C) \land (D \to E) \land (1 \to D) \land (C \to B) \land (A \to 0)$$

Lösung:

- Markiere C wegen $1 \to C$ und D wegen $1 \to D$.
- Markiere B wegen $C \to B$ und weil C markiert und B noch nicht markiert ist.
- Markiere A wegen $B \land B \to A$ und weil B markiert und A noch nicht markiert ist.
- Gib unerfüllbar aus, weil $A \to 0$ und A markiert ist.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{A\}, \{\neg D, C\}, \{C, \neg A\}, \{D, \neg D\}, \{\neg A, D\}, \{\neg D, \neg C, \neg A\}\}$$

Lösung:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg A, D\} \arrow[d, dash] & \{\neg D, \neg C, \neg A\} \arrow[dl, dash] \\
\{\neg A, \neg C\} \arrow[d, dash] & \{C, \neg A\} \arrow[dl, dash] \\
\{\neg A\} \arrow[d, dash] & \{A\} \arrow[dl, dash] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Wandeln Sie die folgende Formel F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform (Skolemform mit Matrix in KNF) um:

$$F = (\forall x P(x) \vee \forall y(P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, y)))$$

Lösung: BPF:

$$\forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 (P(x_1) \vee (P(x) \wedge \neg Q(x_2, y_1)))$$

Aussage in Skolemform:

$$\forall x_1 \forall y_1 (P(x_1) \vee (P(a_x) \wedge \neg Q(f_{x_2}(x_1, y_1), y_1)))$$

Aussage in Klauselform:

$$\forall x_1 \forall y_1 ((P(x_1) \vee P(a_x)) \wedge (P(x_1) \vee \neg Q(f_{x_2}(x_1, y_1), y_1)))$$

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Geben Sie ein Modell für folgende Formel F an. Begründen Sie auch, warum Ihre Struktur ein Modell ist.

$$F = (\exists x R(f(a,x)) \wedge \forall y \neg R(f(y,y)))$$

Lösung: Sei $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{0,1\}$, $R^{\mathcal{A}} = \{0\}$, $a^{\mathcal{A}} = 0$ und

$$f^{\mathcal{A}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\mathcal{A} \models \exists x R(f(a,x))$, weil $\mathcal{A}_{[x/1]} \models R(f(x,a))$, denn $\mathcal{A}_{[x/1]}(f(x,a)) = f^{\mathcal{A}}(1,0) = 0 \in R^{\mathcal{A}}$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \forall y \neg R(f(y,y))$, weil $\mathcal{A}_{[y/d]} \models \neg R(f(y,y))$ für alle $d \in \{0,1\}$, denn $f^{\mathcal{A}}(d,d) = 1 \notin R^{\mathcal{A}}$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgende Literalmenge L an. Geben Sie in jedem Schritt an, welche Literale Sie unifizieren. Geben Sie außerdem in jedem Schritt die Substitution und die Literalmenge an, die Sie erhalten.

$$L = \{P(w, f(y), g(x)), P(f(x), f(w), g(w))\}$$

Lösung: sub $:= \emptyset$.

- $P(w, f(y), g(x))$ und $P(f(x), f(w), g(w))$,
  sub $:=$ sub$[w/f(x)] = [w/f(x)]$,
  Lsub $= \{P(f(x), f(y), g(x)), P(f(x), f(f(x)), g(f(x)))\}$.
- $P(f(x), f(y), g(x))$ und $P(f(x), f(f(x)), g(f(x)))$,
  sub $:=$ sub$[y/f(x)] = [w/f(x), y/f(x)]$,
  Lsub $= \{P(f(x), f(f(x)), g(x)), P(f(x), f(f(x)), g(f(x)))\}$.
- $P(f(x), f(f(x)), g(x))$ und $P(f(x), f(f(x)), g(f(x)))$
  Die Menge ist nicht unifizierbar, da man x durch $f(x)$ ersetzen müsste, aber x kommt in $f(x)$ vor.

Aufgabe 6. (8 Punkte)
Zeigen Sie die folgende Behauptung. (Zur Erinnerung: Es gilt für jede Struktur $\mathcal{A}$, die das Symbol $=$ interpretiert, dass $\mathcal{A}(=) = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{U}_\mathcal{A}\}$.)

$$\forall x f(x) = a \models \exists y f(y) = y$$

Lösung: Sei $\mathcal{A}$ eine zu $\forall x f(x) = a$ und zu $\exists y f(y) = y$ passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \forall x f(x) = a$. Das heißt, dass für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models f(x) = a$. Vor allem gilt also, dass $\mathcal{A}_{[x/a^\mathcal{A}]} \models f(x) = a$, also $f^\mathcal{A}(a^\mathcal{A}) = a^\mathcal{A}$. Damit gilt auch, dass $\mathcal{A}_{[y/a^\mathcal{A}]} \models f(y) = y$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ (nämlich $a^\mathcal{A}$) mit $\mathcal{A}_{[y/d]} \models f(y) = y$, also $\mathcal{A} \models \exists y f(y) = y$.