Klausur zur Vorlesung „Logik I“

SS 2020 / 10. August 2020

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	6	
6	8	
7	8	
Σ	50	

Hinweise

- Tragen Sie bitte **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** in die entsprechenden Felder ein.
- Prüfungsdauer: **60 Minuten**
- Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät** und schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**7 Aufgaben** auf 6 Seiten).
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.

Aufgabe 1. (7 Punkte)
Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

$$F = (C \wedge B \to D) \wedge (D \to A) \wedge (1 \to B) \wedge (E \to 0) \wedge (A \wedge A \to E) \wedge (1 \to C)$$

Geben Sie an, welche atomaren Formeln in jedem Schritt markiert werden, jeweils mit Begründung.

Lösung:

- Markiere B wegen $1 \to B$ und markiere C wegen $1 \to C$.
- Markiere D, weil C und B markiert und $C \wedge B \to D$.
- Markiere A, weil D markiert und $D \to A$.
- Markiere E, weil A und A markiert und $A \wedge A \to E$.
- Gib unerfüllbar aus, weil E markiert und $E \to 0$.

Aufgabe 2. (7 Punkte)
Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{B, \neg C\}, \{C, \neg D, A\}, \{C, \neg B\}, \{A, \neg A\}, \{B, \neg A, C\}, \{\neg C\}, \{B, D\}\}$$

Lösung:

$$\begin{tikzcd}
\{C, \neg D, A\} \arrow[dr, no head] & \{B, \neg A, C\} \arrow[d, no head] & & \\
& \{C, \neg D, B\} \arrow[d, no head] & \{B, \neg C\} \arrow[dl, no head] & \\
\{B, D\} \arrow[dr, no head] & \{\neg D, B\} \arrow[d, no head] & \{C, \neg B\} \arrow[d, no head] & \{\neg C\} \arrow[dl, no head] \\
& \{B\} \arrow[d, no head] & \{\neg B\} \arrow[dl, no head] & \\
& \square & &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3. (7 Punkte)
Gegeben sei folgende Formel F:

$$F = (\forall x Q(x) \lor \neg(P(y) \lor \forall x P(x)))$$

Wandeln Sie F in eine Aussage in Klauselform (Skolemform mit Matrix in KNF) um.

Lösung: BPF:

$$\forall x_1 \exists x_2 (Q(x_1) \lor (\neg P(y) \land \neg P(x_2)))$$

Aussage in Skolemform:

$$\forall x_1 (Q(x_1) \lor (\neg P(a_y) \land \neg P(f_{x_2}(x_1))))$$

Aussage in Klauselform:

$$\forall x_1 ((Q(x_1) \lor \neg P(a_y)) \land (Q(x_1) \lor \neg P(f_{x_2}(x_1))))$$

Aufgabe 4. (7 Punkte)
Wir betrachten folgende Struktur S, wobei $\mathcal{U}_S = \{a, b\}^*$, $\circ^S(x, y) = xy$ (Stringkonkatenation) und $A^S = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält genau ein } a\}$. Formalisieren Sie folgende Aussagen:

(a) (2 Punkte) x ist Suffix von y und y ist Präfix von z.

Lösung: $(\exists z_1\ y = z_1 \circ x \wedge \exists z_2\ z = y \circ z_2)$

(b) (2 Punkte) x hat Länge 0.

Lösung: $\forall y\ x = x \circ y$

(c) (3 Punkte) x enthält genau zwei a.

Lösung: $\exists y \exists z (A(y) \wedge A(z) \wedge x = y \circ z)$

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Geben Sie ein Modell für folgende Formel an.

$$F = (\forall z (Q(z) \to R(z, z, z)) \wedge Q(a) \wedge \neg R(a, f(a), f(a)))$$

Lösung: Sei $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $a^\mathcal{A} = 0$, $Q^\mathcal{A} = \{0\}$, $R^\mathcal{A} = \{(0, 0, 0)\}$ und $f^\mathcal{A}(x) = 1$. Dann gilt $\mathcal{A} \models F$.

Aufgabe 6. (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass folgende Formel gültig ist.

$$F = \forall x \exists y (R(x) \to R(y))$$

Lösung: Sei $\mathcal{A}$ eine zu F passende Struktur. Sei $d \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Es gilt $\mathcal{A}_{[x/d,y/d]} \models (R(x) \to R(y))$, denn wenn $\mathcal{A}_{[x/d,y/d]} \models R(x)$, also $d \in R^{\mathcal{A}}$, dann gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d,y/d]} \models R(y)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models \exists y (R(x) \to R(y))$. Da d beliebig war, gilt auch $\mathcal{A} \models \forall x \exists y (R(x) \to R(y))$.

Aufgabe 7. (8 Punkte)
Widerlegen Sie folgende Behauptung:

$$\forall y \exists x P(y,x) \models \exists x \forall y P(y,x)$$

Lösung: Sei $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0,1\}$ und $P^\mathcal{A} = \{(0,0),(1,1)\}$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \forall y \exists x P(y,x)$, weil $\mathcal{A}_{[y/0,x/0]} \models P(y,x)$ und $\mathcal{A}_{[y/1,x/1]} \models P(y,x)$, aber $\mathcal{A} \not\models \exists x \forall y P(y,x)$, weil $\mathcal{A}_{[x/0,y/1]} \not\models P(y,x)$ und $\mathcal{A}_{[x/1,y/0]} \not\models P(y,x)$.