

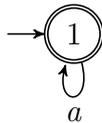
## Übungsblatt 3

**Aufgabe 1.** Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- (a) Zu jedem DFA  $M_1$  mit  $n$  Zuständen existiert ein NFA  $M_2$  mit höchstens  $n$  Zuständen so, dass  $T(M_1) = T(M_2)$ .
- (b) Zu jedem NFA  $M_1$  mit  $n$  Zuständen existiert ein DFA  $M_2$  mit maximal  $2^n$  Zuständen so, dass  $T(M_1) = T(M_2)$ .
- (c) Für einen endlichen Automaten  $M_1$  ist  $T(M_1)$  stets endlich.

**Lösung zu Aufgabe 1.**

- (a) Wahr, denn jeder DFA ist auch ein NFA. Wir können also  $M_2 = M_1$  als NFA wählen.
- (b) Wahr: Durch Potenzmengenkonstruktion erhalten wir aus einem NFA mit  $n$  Zuständen einen DFA mit  $2^n$  Zuständen (die nicht alle vom Startzustand erreichbar sein müssen).
- (c) Falsch, zum Beispiel wird die unendliche Sprache  $L(a^*) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  von dem folgenden endlichen Automaten erzeugt:

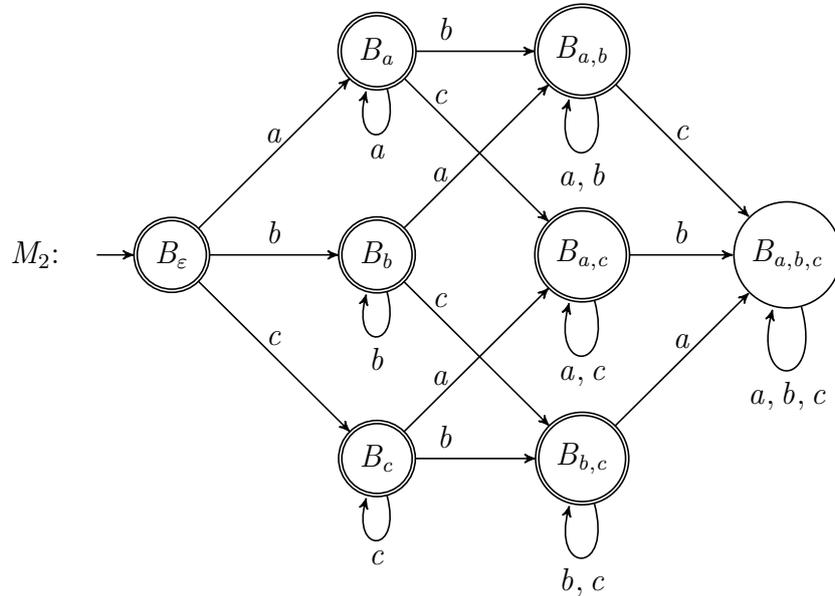


**Aufgabe 2.** Geben Sie zu der folgenden Sprache einen deterministischen, endlichen Automaten an:

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ enthält höchstens zwei verschiedene Buchstaben.}\}$$

Finden Sie einen nichtdeterministischen, endlichen Automaten, der weniger Zustände benötigt?

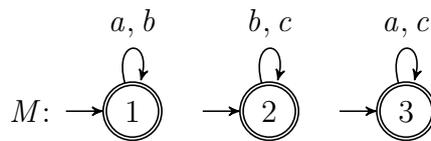
**Lösung zu Aufgabe 2.**



**Erklärung**

Wir verwenden die Zustände des Automaten um zu „speichern“, welche der Symbole  $a, b, c$  bereits im Wort enthalten sind. Zum Beispiel enthalten alle Wörter, die in den Zustand  $B_{a,c}$  führen, beliebig oft die Buchstaben  $a$  und  $c$  aber nicht den Buchstaben  $b$ .

Ein deutlich kleinerer NFA  $M$  mit nur 3 Zuständen (alle sind Start- und Endzustände) sieht wie folgt aus:



**Aufgabe 3.** Gegeben seien folgende NFAs:

- $M_1 = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_1, \{1\}, \{3\})$ , wobei  $\delta_1$  gegeben ist durch:

$\delta_1$	$a$	$b$
1	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{2, 3\}$
3	$\emptyset$	$\{3\}$

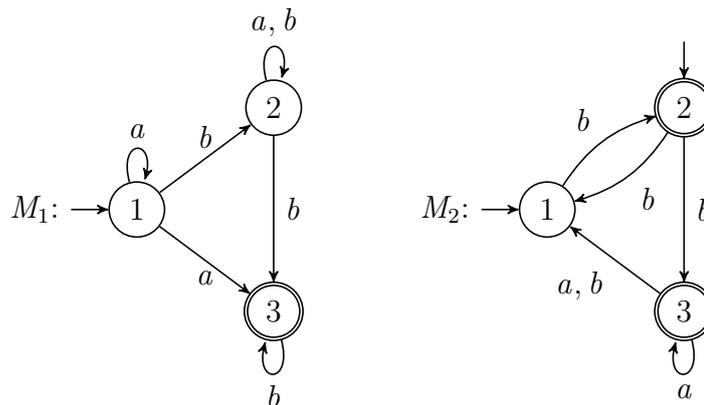
- $M_2 = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_2, \{1, 2\}, \{2, 3\})$ , wobei  $\delta_2$  gegeben ist durch:

$\delta_2$	$a$	$b$
1	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\emptyset$	$\{1, 3\}$
3	$\{1, 3\}$	$\{1\}$

- (a) Zeichnen Sie das zu  $M_1$  bzw.  $M_2$  gehörige Automatendiagramm.
- (b) Geben Sie mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion einen zu  $M_1$  bzw.  $M_2$  äquivalenten DFA an. Es genügt jeweils, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

### Lösung zu Aufgabe 3.

(a)



(b) **DFA zu  $M_1$**

Wir konstruieren den DFA mittels Potenzmengenkonstruktion. Vom Startzustand nicht erreichbare Zustände werden weggelassen.

Sei  $Z = \{1, 2, 3\}$  die Menge der Zustände von  $M_1$  und  $S = \{1\}$  die Menge der Startzustände von  $M_1$ .

Sei  $M'_1 = (2^Z, \{a, b\}, \delta'_1, S, F)$  der DFA zu  $M_1$ .

Beachte: Die Bezeichnungen der Zustände aus  $M'_1$  sind die Teilmengen der Zustandsmenge  $Z$  von  $M_1$ . Somit ist zum Beispiel  $S = \{1\}$  keine Menge von Startzuständen von  $M'_1$ , sondern ein einzelner Zustand aus  $2^Z$ .

$$\delta'_1(\{1\}, a) = \delta_1(1, a) = \{1, 3\}$$

$$\delta'_1(\{1\}, b) = \delta_1(1, b) = \{2\}$$

$$\delta'_1(\{1, 3\}, a) = \delta_1(1, a) \cup \delta_1(3, a) = \{1, 3\} \cup \emptyset = \{1, 3\}$$

$$\delta'_1(\{1, 3\}, b) = \delta_1(1, b) \cup \delta_1(3, b) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$$

$$\delta'_1(\{2, 3\}, a) = \delta_1(2, a) \cup \delta_1(3, a) = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$$

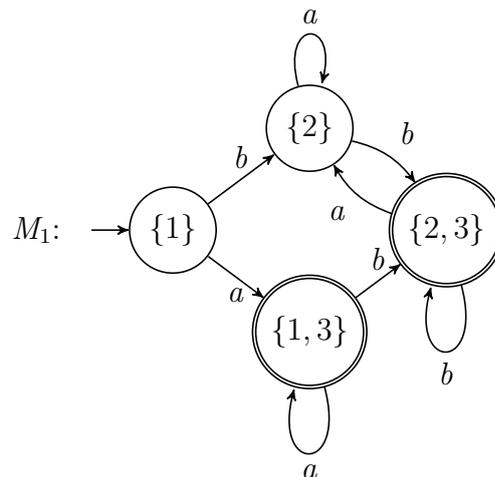
$$\delta'_1(\{2, 3\}, b) = \delta_1(2, b) \cup \delta_1(3, b) = \{2, 3\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$$

$$\delta'_1(\{2\}, a) = \delta_1(2, a) = \{2\}$$

$$\delta'_1(\{2\}, b) = \delta_1(2, b) = \{2, 3\}$$

Nun bestimmen wir noch  $F$ , die Menge der Endzustände des DFA. Allgemein gilt  $F = \{Y \subseteq Z \mid Y \cap E \neq \emptyset\}$ . Dabei ist  $Z$  die Zustandsmenge des NFA,  $E$  die Menge seiner Endzustände.

Für  $M_1$  ergibt sich  $F = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  (alle Teilmengen von  $\{1, 2, 3\}$ , die das Element 3 enthalten). Vom Startzustand aus erreichbar sind davon die Zustände  $\{1, 3\}$  und  $\{2, 3\}$ .



### DFA zu $M_2$

Sei  $Z = \{1, 2, 3\}$  die Menge der Zustände von  $M_2$  und  $S = \{1, 2\}$  die Menge der Startzustände von  $M_2$ .

Sei  $M'_2 = (2^Z, \{a, b\}, \delta'_2, S, F)$  der DFA zu  $M_2$ .

$$\delta'_2(\{1, 2\}, a) = \delta_2(1, a) \cup \delta_2(2, a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$\delta'_2(\{1, 2\}, b) = \delta_2(1, b) \cup \delta_2(2, b) = \{2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\delta'_2(\{1, 2, 3\}, a) = \delta_2(1, a) \cup \delta_2(2, a) \cup \delta_2(3, a) = \emptyset \cup \emptyset \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$$

$$\delta'_2(\{1, 2, 3\}, b) = \delta_2(1, b) \cup \delta_2(2, b) \cup \delta_2(3, b) = \{2\} \cup \{1, 3\} \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\delta'_2(\{1, 3\}, a) = \delta_2(1, a) \cup \delta_2(3, a) = \emptyset \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$$

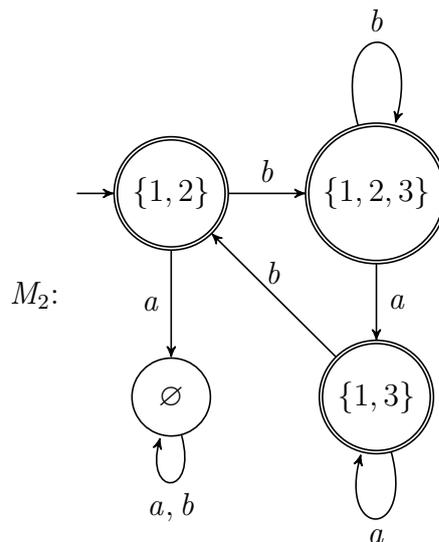
$$\delta'_2(\{1, 3\}, b) = \delta_2(1, b) \cup \delta_2(3, b) = \{2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$$

$$\delta'_2(\emptyset, a) = \emptyset$$

$$\delta'_2(\emptyset, b) = \emptyset$$

Für  $M_2$  ergibt sich  $F = \{\{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  (alle Teilmengen von  $\{1, 2, 3\}$ , die 2 oder 3 enthalten).

Vom Startzustand aus erreichbar sind davon die Zustände  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$  und  $\{1, 2, 3\}$ .



**Aufgabe 4.** Anna steht im Treppenhaus des Hölderlingebäudes und läuft die Treppen hoch und runter. Jedes Mal, wenn sie eine Stufe hinaufsteigt, notiert sie sich ein  $\uparrow$ . Jedes Mal, wenn sie eine Stufe hinuntersteigt, notiert sie sich ein  $\downarrow$ . Geben Sie eine Grammatik an, die die Sprache aller Wörter über  $\{\uparrow, \downarrow\}$  erzeugt, so dass Anna am Ende wieder an der Anfangsposition steht. Sie dürfen dabei davon ausgehen, dass Anna beliebig viele Stockwerke hinauf und hinab gehen kann.

**Lösung zu Aufgabe 4.**

Damit Anna am Ende wieder an der Anfangsposition steht, muss die Anzahl der  $\uparrow$  im Wort gleich der Anzahl der  $\downarrow$  sein.

Eine mögliche Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit unendlich vielen Stockwerken ist definiert durch

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow\}$
- $P = \{S \rightarrow \uparrow S \downarrow S, S \rightarrow \downarrow S \uparrow S, S \rightarrow \varepsilon\}$ .