Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $L((a \mid bb)^*) = L(a^* \mid (bb)^*)$.

(b) $L(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*) = \{a, b\}^*$.

(c) Jeder reguläre Ausdruck ohne den $*$-Operator erzeugt eine endliche Sprache.

Aufgabe 2. Zur Erinnerung (Folie 16): Ein *Monoid* ist ein Paar $(M, \times)$, wobei M eine Menge und $\times : M \times M \to M$ eine assoziative Abbildung ist und es ein neutrales Element in $e \in M$ gibt, d.h. $a \times e = a = e \times a$ für alle $a \in M$.

1. Zeigen Sie: $(L((ab)^*), \circ)$ ist ein Monoid (Erinnerung: $\circ$ ist die Konkatenation von Wörtern).

2. Ist $(L, \circ)$ für jede reguläre Sprache L ein Monoid?

Ein *(Monoid-)Homomorphismus* zwischen zwei Monoiden $(M, \circ)$ und $(N, \cdot)$ ist eine Abbildung $h : M \to N$ mit den Eigenschaften $h(u \circ v) = h(u) \cdot h(v)$ und $h(e_M) = e_N$ für alle $u, v \in M$ und die neutralen Elemente $e_M \in M$ und $e_N \in N$. Ein Homomorphismus heißt *Isomorphismus*, falls er *bijektiv* ist, d.h. es gibt eine Abbildung $h^{-1} : N \to M$ mit $h(h^{-1}(n)) = n$ und $h^{-1}(h(m)) = m$ für alle $m \in M$ und $n \in N$.

3. Zeigen Sie, dass es einen Monoid-Isomorphismus zwischen $(L((ab)^*), \circ)$ und $(\mathbb{N}, +)$ gibt.

4. Zeigen Sie, dass es *keinen* Monoid-Isomorphismus zwischen $(\{\varepsilon\}, \circ)$ und $(\mathbb{N}, +)$ geben kann.

Aufgabe 3. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen einen regulären Ausdruck an.

(a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{Das Wort } w \text{ enthält mindestens ein } b.\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^+ \mid \text{Der erste und letzte Buchstabe in } w \text{ stimmen überein.}\}$

(c) $L_3 = \left\{a^n b^m c^\ell \mid n \geq 0,\ m \geq 1,\ \ell \geq 2\right\}$

Aufgabe 4. Geben Sie endliche Automaten und reguläre Ausdrücke an, die die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ erkennen bzw. definieren.

(a) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } b \text{ und enthält das Teilwort } abc\}$.

(b) $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$.

(c) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält nicht das Teilwort } aba\}$.