Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Wiederholen Sie noch einmal den Begriff *Homomorphismus* von Blatt 4. Ein Homomorphismus zwischen den Alphabeten Σ und Γ ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$, welche jedem Alphabetsymbol $a \in \Sigma$ einen String über Γ zuweist und sich wie folgt auf beliebige Wörter über Σ erweitert: Sei $w = a_1 \cdots a_n$, dann ist $h(w) = h(a_1) \cdots h(a_n)$.

(a) Zeigen Sie, falls L eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus zwischen Σ und Γ ist, dann ist $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$ wieder regulär (über Γ).

Seien nun $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Wir wissen, dass L nicht regulär ist. Benutzen Sie die Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, um zu zeigen, dass folgende Sprachen ebenfalls nicht regulär sind.

(b) $L_b = \{a^m b^n \mid m, n \geq 0, m \neq n\} \cup L((a|b)^* ba(a|b)^*)$

(c) $L_c = \{b^n a^n \mid n \geq 0\}$

(d) $L_d = \{w \in \Sigma^* \mid \text{Die Anzahl der Zeichen } a \text{ und } b \text{ in } w \text{ sind gleich.}\}$

Aufgabe 2. Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Sei $A \cap B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(b) Sei $A \cup B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(c) Sei $A \cdot B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(d) Sei h ein Homomorphismus auf Σ und gelte $h(A) = B$. Wenn B regulär ist, dann ist A regulär.

Aufgabe 3. Prüfen Sie für jede der folgenden binären Relationen, welche der Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* erfüllt sind. Handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

(a) “ $\leq$ ” auf Σ^* mit $v \leq w$ genau dann, wenn es $u, x \in \Sigma^*$ gibt mit $uvx = w$.

(b) “ $<$ ” auf Σ^* mit $v < w$ genau dann, wenn $|v| < |w|$.

(c) $R_n \subseteq \{a,b\}^* \times \{a,b\}^*$ für ein $n \geq 2$ mit $v\ R_n w$ genau dann, wenn die Anzahl der $a's$ in v und die Anzahl der $a's$ in w den gleichen Rest bei Division durch n liefern.

(d) $R \subseteq (\Sigma^*)^{10} \times (\Sigma^*)^{10}$ mit $(v_1, \ldots, v_{10})\ R\ (w_1, \ldots, w_{10})$ genau dann, wenn $v_i\ R_i\ w_i$ $(1 \leq i \leq 10)$, wobei alle R_i Äquivalenzrelationen sind.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für jede Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ die Menge aller Äquivalenzklassen eine Partition der Menge A bilden, d.h. jedes Element $x \in A$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse.

Aufgabe 5. Betrachten Sie die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Wie sehen die Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen bezüglich L aus?