Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Wiederholen Sie noch einmal den Begriff *Homomorphismus* von Blatt 4. Ein Homomorphismus zwischen den Alphabeten Σ und Γ ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$, welche jedem Alphabetsymbol $a \in \Sigma$ einen String über Γ zuweist und sich wie folgt auf beliebige Wörter über Σ erweitert: Sei $w = a_1 \cdots a_n$, dann ist $h(w) = h(a_1) \cdots h(a_n)$.

(a) Zeigen Sie, falls L eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus zwischen Σ und Γ ist, dann ist $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$ wieder regulär (über Γ).

Seien nun $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Wir wissen, dass L nicht regulär ist. Benutzen Sie die Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, um zu zeigen, dass folgende Sprachen ebenfalls nicht regulär sind.

(b) $L_b = \{a^m b^n \mid m, n \geq 0, m \neq n\} \cup L((a|b)^* ba(a|b)^*)$

(c) $L_c = \{b^n a^n \mid n \geq 0\}$

(d) $L_d = \{w \in \Sigma^* \mid \text{Die Anzahl der Zeichen } a \text{ und } b \text{ in } w \text{ sind gleich.}\}$

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) Da L regulär ist, gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$. Wir können die Abbildung h auf α anwenden, also insbesondere auf jedes Alphabetsymbol in α. Damit ergibt sich ein regulärer Ausdruck $h(\alpha)$ (dies ist nicht definiert worden, aber als Notation so sinnvoll), wobei $L(h(\alpha)) = h(L)$. Die Gleichheit müsste eigentlich noch gezeigt werden, ist aber relativ offensichtlich.

Alternativ kann man auch h auf die endlichen Automaten anwenden (Beweis: Siehe Advanced Logic) oder auf die Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen. Man erhält auf diese Art und Weise für $h(L)$ höchstens so viele Äquivalenzklassen wie für L (Beweis: Übungsaufgabe).

(b) Der erste Teil von L_b vereinigt mit L ergibt genau alle Wörter über Σ, die nicht das Teilwort ba enthalten. Somit gilt genau $L = \Sigma^* \setminus L_b$. Wegen des Abschlusses regulärer Sprachen bei Differenz- bzw. Komplementbildung ist L_b also nicht regulär (sonst wäre auch L regulär).

(c) Sei $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert durch $h(a) = b$ und $h(b) = a$. Es gilt $h(L_c) = L$. Die Abbildung erfüllt offenbar $h(ww') = h(w)h(w')$ für alle $w, w' \in \Sigma^*$ und ist somit ein Homomorphismus (h ist sogar nur eine Umbenennung der Zeichen, also ein Isomorphismus). Wäre L_c regulär, so müsste wegen Teilaufgabe (a) auch L regulär sein. Widerspruch.

(d) Sei $L' = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$. Die Sprache L' ist regulär, da $L' = L(a^* b^*)$. Wäre L_d regulär, so auch $L = L_d \cap L'$ wegen Abgeschlossenheit regulärer Sprachen unter Schnittbildung. Widerspruch.

Aufgabe 2. Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Sei $A \cap B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(b) Sei $A \cup B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(c) Sei $A \cdot B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(d) Sei h ein Homomorphismus auf Σ und gelte $h(A) = B$. Wenn B regulär ist, dann ist A regulär.

Lösung zu Aufgabe 2.

(a) Falsch: Sei z.B. $\Sigma = \{a, b\}$ mit $A = \{ab\}, B = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Dann gilt $C = A \cap B = \{ab\}$.
A und C sind regulär, B aber nicht (siehe Vorlesung).

(b) Falsch: Sei z.B. $\Sigma = \{a, b\}$ mit $A = \Sigma^*, B = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Dann gilt $C = A \cup B = \Sigma^*$.
A und C sind regulär, B aber nicht.

(c) Falsch: Sei z.B. $\Sigma = \{a, b\}$ mit $A = \Sigma^*, B = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Da das leere Wort ε in B enthalten ist, gilt $C = A \cdot B = \Sigma^*$.
Somit sind A und C regulär, B aber nicht.

(d) Falsch: Sei z.B. $\Sigma = \{a, b\}$ mit $A = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und
$h(a) = h(b) = a$. Dann ist $B = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulär, aber A nicht.

Aufgabe 3. Prüfen Sie für jede der folgenden binären Relationen, welche der Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* erfüllt sind. Handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

(a) „ $\leq$ " auf Σ^* mit $v \leq w$ genau dann, wenn es $u, x \in \Sigma^*$ gibt mit $uvx = w$.

(b) „ $<$ " auf Σ^* mit $v < w$ genau dann, wenn $|v| < |w|$.

(c) $R_n \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ für ein $n \geq 2$ mit $v\ R_n w$ genau dann, wenn die Anzahl der $a's$ in v und die Anzahl der $a's$ in w den gleichen Rest bei Division durch n liefern.

(d) $R \subseteq (\Sigma^*)^{10} \times (\Sigma^*)^{10}$ mit $(v_1, \ldots, v_{10})\ R\ (w_1, \ldots, w_{10})$ genau dann, wenn $v_i\ R_i\ w_i$ $(1 \leq i \leq 10)$, wobei alle R_i Äquivalenzrelationen sind.

Lösung zu Aufgabe 3.

(a) reflexiv, transitiv, nicht symmetrisch (z.B. $v = a$, $w = ab$)

(b) nicht reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv

(c) R_n ist eine Äquivalenzrelation (vgl. DFA „Zähler modulo n“)

(d) R ist eine Äquivalenzrelation (Eigenschaften gelten komponentenweise)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für jede Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ die Menge aller Äquivalenzklassen eine Partition der Menge A bilden, d.h. jedes Element $x \in A$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse.

Lösung zu Aufgabe 4. Wir müssen zwei Eigenschaften zeigen. Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und sei $x \in A$.

- Dass x in mindestens einer Äquivalenzklasse liegt, ist schnell gezeigt, denn es gilt
$$x \in [x] = \{y \in A \mid x\ R\ y\},$$
da $x\ R\ x$ erfüllt ist (Reflexivität).

- Um zu beweisen, dass x in höchstens einer Äquivalenzklasse liegt, müssen wir zunächst folgende Behauptung zeigen: $x\ R\ y \Leftrightarrow [x] = [y]$.

  Dazu: Ist $x\ R\ y$, so gilt wegen der Symmetrieeigenschaft auch $y\ R\ x$. Also ist
$$[x] = \{y \in A \mid x\ R\ y\} = \{x \in A \mid y\ R\ x\} = [y].$$

  Falls $(x, y) \notin R$ gilt, so ist $y \notin [x]$ und wegen des zuvor Gezeigten auch $y \in [y]$. Folglich müssen $[x]$ und $[y]$ verschieden sein.

  Nehmen wir nun an, dass x in zwei Äquivalenzklassen liegt, also $x \in [y]$ und $x \in [z]$. Wegen $x \in [y]$ ist $y\ R\ x$ und wegen $x \in [z]$ ist $x\ R\ z$. Folglich gilt auch $y\ R\ z$ (Transitivität), was $[y] = [z]$ impliziert. Die beiden Äquivalenzklassen sind also identisch.

Aufgabe 5. Betrachten Sie die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Wie sehen die Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen bezüglich L aus?

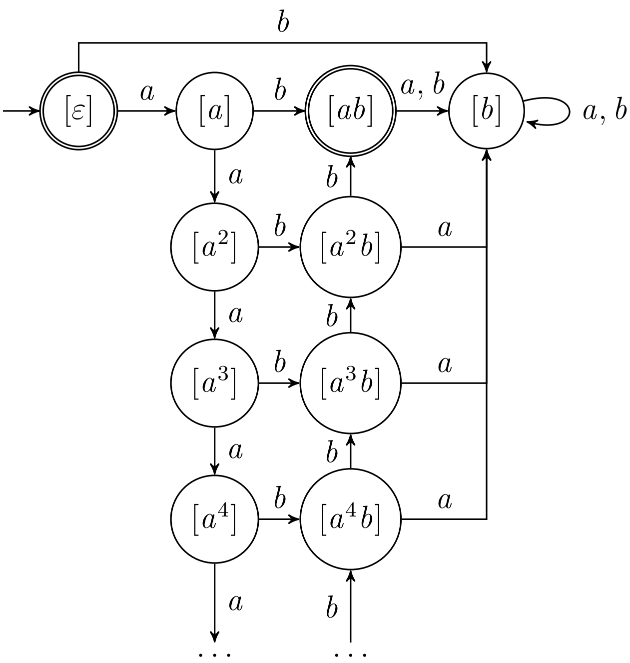
Lösung zu Aufgabe 5. Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen

- $[b] = \Sigma^* \setminus \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$
  Diese Äquivalenzklasse enthält alle Wörter, die sich nicht zu einem Wort in der Sprache L verlängern lassen. D.h. für jedes Wort $x \in [b]$ gilt, dass für alle $w \in \Sigma^*$ auch $xw \notin L$.

- Für jedes $n \geq 0$ gibt es eine Klasse $[a^n] = \{a^n\}$.
  Diese unendlich vielen Äquivalenzklassen (eine für jedes $n \geq 0$) enthalten jeweils nur ein Wort (a^n). Für $x = a^n$ gilt, dass $xw \in L$ genau dann wenn $w \in \{a^m b^{m+n} \mid m \geq 0\}$.

- Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Klasse $[a^n b] = \{a^{n+m} b^{m+1} \mid m \geq 0\}$.
  Diese unendlich vielen Äquivalenzklassen (eine für jedes $n \geq 1$) enthalten jeweils unendlich viele Wörter. Für jedes Wort $x \in [a^n b]$ gilt, dass $xw \in L$ genau dann wenn $w = b^{n-1}$.

Eine etwas intuitivere Vorstellung über die Äquivalenzklassen erhält man möglicherweise durch den Versuch einen minimalen (unendlichen) deterministischen Automaten für L zu kreieren:



Mit Hilfe der oben aufgelisteten Beschreibungen lässt sich leicht zeigen, dass alle aufgezählten Klassen wirklich von der Myhill-Nerode-Äquivalenz getrennt werden. Betrachten wir zum Beispiel eine Klasse $[a^n]$ und eine Klasse $[a^m]$ mit $n \neq m$. Dann ist $a^n b^n \in L$ während $a^m b^n \notin L$, woraus direkt folgt dass a^n und a^m nicht in der gleichen Äquivalenzklasse liegen. Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Klasse $[a^n]$ und eine Klasse $[a^m b]$ für beliebige $n \geq 0$ und $m \geq 1$. Wir haben $a^n ab^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1} \in L$ während $a^m bab^{n+1} \notin L$ und somit folgt auch hier dass beide Wörter nicht äquivalent sind. Analog lässt sich zeigen, dass die verbleibenden Paare von Klassen jeweils getrennt werden können.