Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Im folgenden sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ eine reguläre Sprache und sei $[w]$ die Myhill-Nerode Äquivalenzklasse von $w \in \Sigma^*$ bezüglich der Myhill-Nerode Äquivalenz R_L. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Wenn $[\varepsilon] \cap L = \varnothing$, dann ist der Startzustand in einem DFA zu L kein Endzustand.

(b) Wenn $[a] \cap L = \varnothing$ und $[b] \cap L = \varnothing$, dann gilt $L = \varnothing$.

(c) Wenn $[\varepsilon] = [b]$ und $[\varepsilon] \subseteq L$, dann gilt $b^n \in L$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(d) Jede kontextfreie Sprache hat unendlich viele Myhill-Nerode Äquivalenzklassen.

(e) Jede Sprache besitzt mindestens zwei Myhill-Nerode Äquivalenzklassen.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen die Anzahl der Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen. Falls die Sprache regulär ist, geben Sie zusätzlich einen minimalen DFA an, der die Sprache erkennt. Falls die Sprache nicht regulär ist, beweisen Sie dies zusätzlich mit Hilfe des Pumping-Lemmas.

(a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^r\}$

(b) $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

(c) $\{(ab)^n \mid n \geq 2\}$

(d) $\{a^n b a^m \mid (n + m) \text{ ist gerade}\}$

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

(a) $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$

(b) $\{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

(c) $\{a^{F(n)} \mid n \geq 0\}$, wobei $(F(n))_{n\geq 0}$ die Folge der *Fibonacci-Zahlen* ist, die wir induktiv definieren durch

$$F(0) = 1, \quad F(1) = 2 \quad \text{und } F(n) = F(n-1) + F(n-2) \text{ für } n \geq 2.$$

Aufgabe 4. Bekanntermaßen ist die Sprache

$$L = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

regulär. Im Folgenden wird versucht zu beweisen, dass sie dies nicht ist. Finden Sie den Fehler.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{2n}$. Dann ist $x \in L$ und $|x| = 2n \geq n$. Betrachten wir alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, so ist $uv = a^l$ für ein l mit $1 \leq l \leq n$ und damit $v = a^k$ mit $1 \leq k \leq l$. Damit ist $uv^2w = a^{2n+k} \neq a^{2n}$ und somit $uv^2w \notin L$. Somit ist L nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen nicht regulär.