Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit $|Z| = 16$ Zuständen. Kann ein Automat $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0, F)$ existieren, der ein minimaler DFA mit $|Z'| = 76543$ und $L(M) = L(M')$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 1. Durch Potenzmengenkonstruktion erhält man einen DFA M'' mit $L(M) = L(M'')$ mit höchstens $2^{|Z|} = 2^{16} = 65536$ vielen Zuständen. Es gilt $L(M') = L(M) = L(M'')$ und $2^{16} < 76543$, also kann M' kein minimaler DFA sein.

Aufgabe 2. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben ist der DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 1, E)$ mit $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{7\}$ und

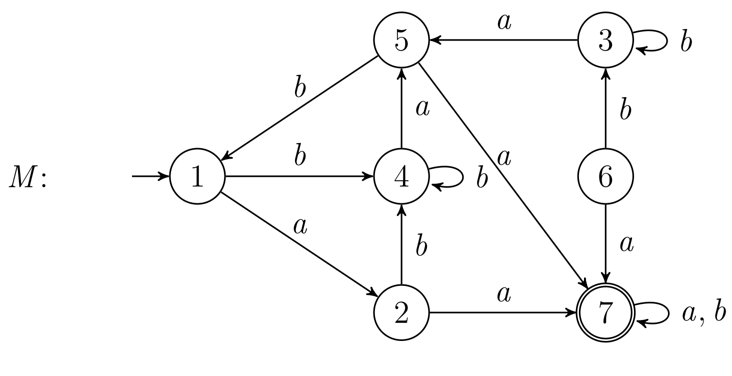
δ	a	b
1	2	4
2	7	4
3	5	3
4	5	4
5	7	1
6	7	3
7	7	7

(a) Zeichnen Sie das Automatendiagramm von M.

(b) Verwenden Sie den "Algorithmus Minimalautomat", um den Minimalautomaten für die Sprache $L(M)$ zu erhalten.

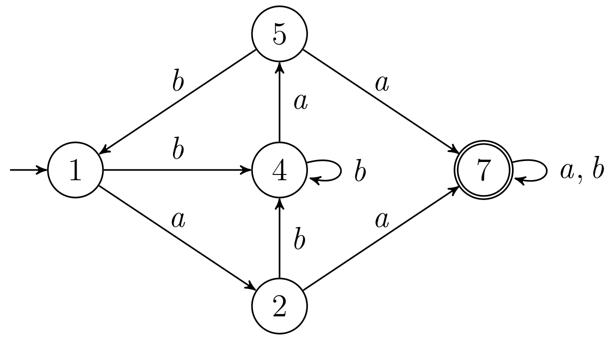
(c) Zeichnen Sie den in (b) erhaltenen Automaten.

Lösung zu Aufgabe 2. (a)



(b) Die Zustände 3 und 6 sind vom Startzustand aus nicht erreichbar und können gestrichen werden.

M:



Nun wenden wir den „Algorithmus Minimalautomat“ von Folie 165 des Skripts an.

Anmerkung: Wir arbeiten mit **Mengen** von zwei Zuständen, nicht mit Tupeln, es gilt also $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Schritt 0

Bilden aller Zustandspaare $\{z, z'\}$ mit $z \neq z'$.

2				
4				
5				
7				
	1	2	4	5

Schritt 1

Markiere alle Paare $\{z, z'\}$ mit $z \in E$ und $z' \notin E$.

2				
4				
5				
7	1	1	1	1
	1	2	4	5

Schritt 2

Für jedes noch unmarkierte Paar $\{z, z'\}$ und jedes $s \in \Sigma$ teste, ob $\{\delta(z,s), \delta(z',s)\}$ bereits markiert ist. Falls ja, markiere auch $\{z, z'\}$.

Neue Markierungen:

- $\{1, 2\}$, da $\{\delta(1, a), \delta(2, a)\} = \{2, 7\}$ bereits markiert
- $\{1, 5\}$, da $\{\delta(1, a), \delta(5, a)\} = \{2, 7\}$ bereits markiert
- $\{2, 4\}$, da $\{\delta(1, a), \delta(4, a)\} = \{7, 5\}$ bereits markiert
- $\{4, 5\}$, da $\{\delta(4, a), \delta(5, a)\} = \{5, 7\}$ bereits markiert

2	2			
4		2		
5	2		2	
7	1	1	1	1
	1	2	4	5

Schritt 3, Wiederholung

$\{1, 4\}$ und $\{2, 5\}$ sind noch unmarkiert, es kommen keine weiteren Markierungen hinzu, da

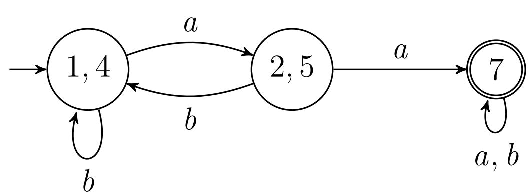
- $\{\delta(1, a), \delta(4, a)\} = \{2, 5\}$ nicht markiert
- $\{\delta(1, b), \delta(4, b)\} = \{4, 4\}$ nicht markiert
- $\{\delta(2, a), \delta(5, a)\} = \{7, 7\}$ nicht markiert
- $\{\delta(2, b), \delta(5, b)\} = \{1, 4\}$ nicht markiert

Die verbleibenden unmarkierten Zustandspaare $\{1, 4\}$ und $\{2, 5\}$ sind jeweils erkennungsäquivalent.

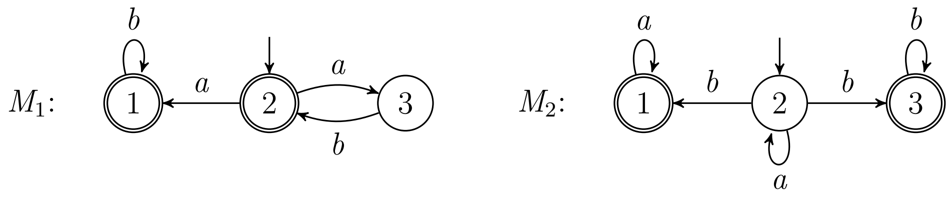
<u>Beachte:</u> Diese Begründungen müssen auch in der Klausur dazugeschrieben werden!

(c)

M:



Aufgabe 3.
Gegeben seien die folgenden NFAs M_1, M_2 (siehe Blatt 5, Aufgabe 2).

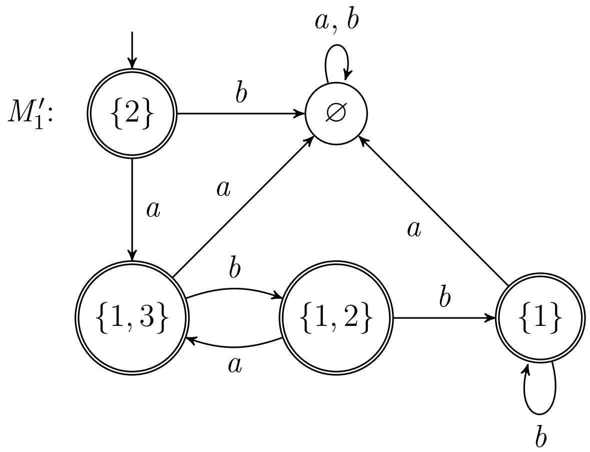


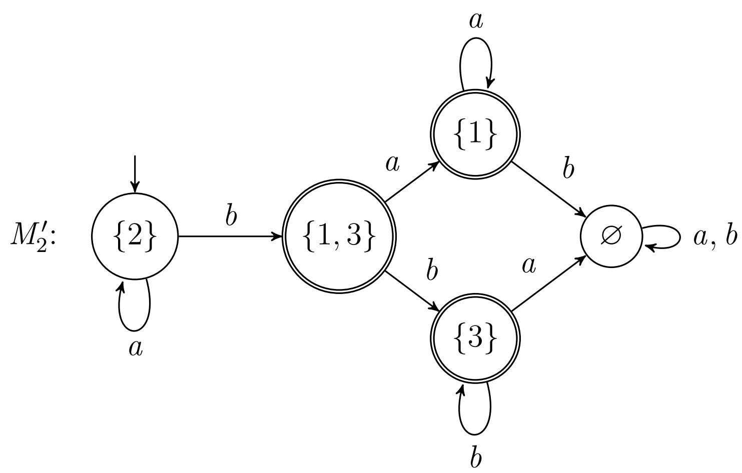
Lösen Sie mit dem Vorgehen aus der Vorlesung das Inklusionsproblem:

$$T(M_1) \subseteq T(M_2)$$

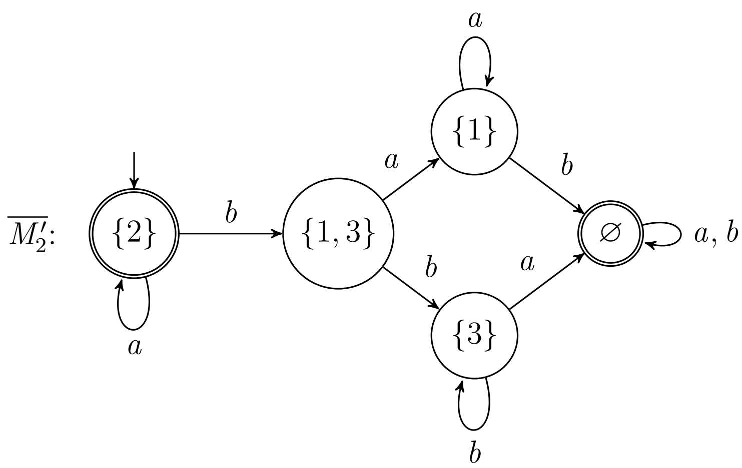
Lösung zu Aufgabe 3. Da $\varepsilon \in T(M_1)$ aber $\varepsilon \notin T(M_2)$, wissen wir, dass $T(M_1) \subseteq T(M_2)$ nicht gelten kann. $T(M_1) \subseteq T(M_2)$ ist äquivalent zu $T(M_1) \cap \overline{T(M_2)} = \varnothing$. Nun wollen wir mit dem Verfahren aus der Vorlesung zeigen, dass dies nicht gilt.

Zunächst konstruieren wir mittels Potenzmengenkonstruktion die DFAs für M_1 und M_2. Dies haben wir schon auf Blatt 5 erledigt.

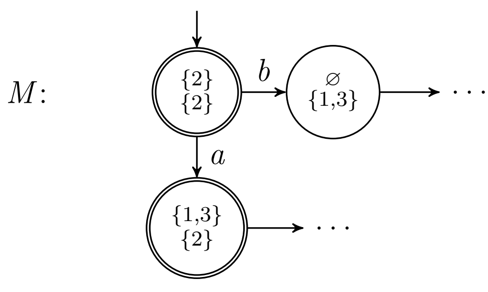




Dann erzeugen wir $\overline{M_2'}$, so dass $T(\overline{M_2'}) = \overline{T(M_2')} = \overline{T(M_2)}$, indem wir Endzustande und Nicht-Endzustände im DFA M_2' vertauschen.
<u>Beachte</u>: NFAs auf diese Art zu „komplementieren" funktioniert nicht (siehe Aufgabe 4).



Nun bestimmen wir einen DFA M für $T(M_1) \cap \overline{T(M_2)} = T(M_1') \cap T(\overline{M_2'})$ (Kreuzproduktautomat):



Anmerkung: Aus Platzgründen sind die Zustandspaare untereinander geschrieben - oben jeweils der Zustand in M_1', darunter der Zustand in $\overline{M_2'}$.

Wir brauchen nicht den kompletten Automaten zu konstruieren, da wir schon nach wenigen Schritten sehen, dass einen Pfad im Automaten M gibt, der vom Anfangszustand in einen Endzustand führt. Zum Beispiel findet man so, dass $\varepsilon, a \in T(M) = T(M_1) \cap \overline{T(M_2)}$. Somit gilt $T(M_1) \subseteq T(M_2)$ nicht.

Aufgabe 4.
Ein NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ heißt *fast-deterministisch*, wenn gilt:

$$|S| = 1 \text{ und } \forall z \in Z, a \in \Sigma : |\delta(z, a)| \leq 1\,.$$

Ein NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ heißt *vollständig*, wenn gilt:

$$\forall z \in Z, a \in \Sigma : |\delta(z, a)| \geq 1\,.$$

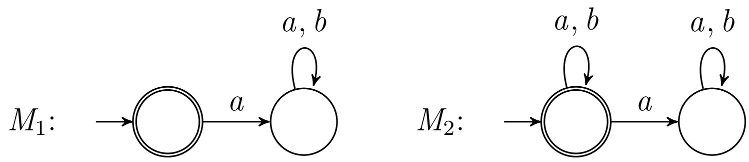
Offensichtlich kann jeder vollständige, fast-deterministische NFA als DFA angesehen werden. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein vollständiger, fast-deterministischer NFA und $M' = (Z, \Sigma, \delta, S, Z \setminus E)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann $T(M') = \overline{T(M)}$ gilt (siehe: Abschluss unter Komplement).

(a) Zeigen Sie durch Angabe jeweils eines Gegenbeispiels, dass diese Gleichheit nicht garantiert ist, wenn M (i) nicht vollständig (aber fast-deterministisch) oder (ii) nicht fast-deterministisch (aber vollständig) ist.

(b) Schlägt die Gleichheit im Fall (i) oder (ii) in jedem Fall fehl? Zeigen Sie Ihre Annahme!

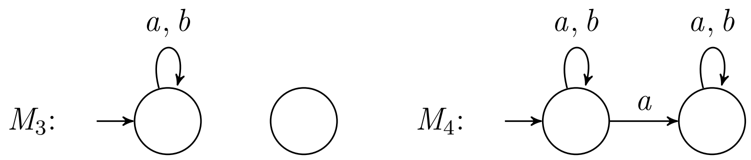
Lösung zu Aufgabe 4.

(a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegenbeispiele zu (i) bzw. (ii) sind zum Beispiel die Automaten M_1 bzw. M_2:



Es gilt $T(M_1) = \{\varepsilon\}$, aber $T(M_1') = L(a(a|b)^*)$, sowie $T(M_2) = \Sigma^*$, aber $T(M_2') = L((a|b)^* a(a|b)^*)$. Die Komplemente von $T(M_i)$ stimmen in beiden Fällen also nicht mit $T(M_i')$ überein.

(b) Beispiele für (i) bzw. (ii) sind



denn es gilt $T(M_i) = \varnothing$ bzw. $T(M_i') = \Sigma^*$.

Das Beispiel mit dem zweiten separaten Zustand bei M_3 sieht etwas künstlich aus, ist aber konform mit der Definition von NFAs. Nimmt man stattdessen an, dass alle Zustände vom Startzustand aus erreichbar sind, kann man zeigen, dass im Fall (i) die Situation $T(M') = \overline{T(M)}$ niemals auftreten kann.