Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei $L = \{ab^n \mid n \geq 1\}$.

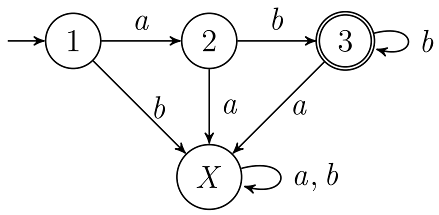
(a) Geben Sie den Minimalautomaten (bis auf Umbenennung der Zustände) an.

(b) Beweisen Sie, dass Ihr Minimalautomat wirklich minimal ist, indem Sie zeigen, dass der Index der Relation R_L gleich der Anzahl der Zustände Ihres Automaten ist.

(c) Geben Sie mindestens zwei verschiedene NFAs (nicht durch Umbenennung der Zustände) mit drei Zuständen an, die L akzeptieren.

Lösung zu Aufgabe 1. (a)

M:



(b) Die Myhill-Nerode Äquivalenzklassen sind:

- $[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$ (Zustand 1)
- $[a] = \{a\}$ (Zustand 2)
- $[ab] = L = \{ab^n \mid n \geq 1\}$ (Zustand 3)
- $[b] = \{w \mid w \notin L, w \neq a, w \neq \varepsilon\}$ (Zustand X)

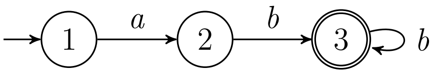
Die Klassen sind unterschiedlich, da man sie jeweils trennen kann:

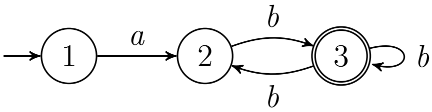
- $\neg(\varepsilon\ R_L\ a)$: $\varepsilon \cdot b = b \notin L$, während $a \cdot b = ab \in L$
- $\neg(\varepsilon\ R_L\ ab)$: $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon \notin L$, während $ab \cdot \varepsilon = ab \in L$
- $\neg(\varepsilon\ R_L\ b)$: $\varepsilon \cdot ab = ab \in L$, während $b \cdot ab = bab \notin L$
- $\neg(a\ R_L\ ab)$: $a \cdot \varepsilon = a \notin L$, während $ab \cdot \varepsilon = ab \in L$
- $\neg(a\ R_L\ b)$: $a \cdot b = ab \in L$, während $b \cdot b = bb \notin L$
- $\neg(ab\ R_L\ b)$: $ab \cdot \varepsilon = ab \in L$, während $b \cdot \varepsilon = b \notin L$

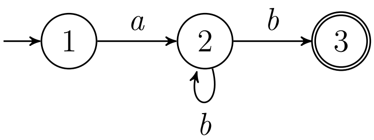
Es gilt $\text{index}(R_L) = 4 =$ Anzahl der Zustände.

Damit ist der Automat aus Aufgabenteil (a) minimal.

(c) Verschiedene NFAs für L:

M_1: 

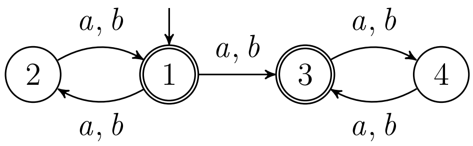
M_2: 

M_3: 

Aufgabe 2. Das *Universalitätsproblem* für reguläre Sprachen ist das folgende Problem: Geben ist eine reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, als DFA, NFA oder regulärer Ausdruck. Frage: Gilt $L = \Sigma^*$?

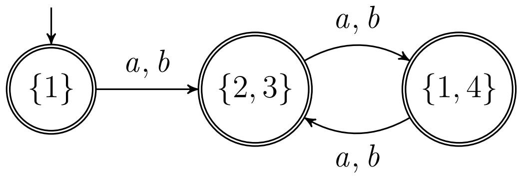
(a) Zeigen Sie, dass das Universalitätsproblem für reguläre Sprachen entscheidbar ist, indem Sie ein Verfahren angeben, dass das Problem löst.

(b) Wenden Sie Ihr Verfahren an, um das Universalitätsproblem für die Sprache L zu lösen, die von dem folgenden NFA akzeptiert wird:



Lösung zu Aufgabe 2. (a) Ist die Sprache als NFA oder regulärer Ausdruck gegeben, wandeln wir diese erst mit den Verfahren aus der Vorlesung in einen DFA um. Ist die Sprache als DFA gegeben, überprüfen wir, ob jeder vom Startzuständ erreichbare Zustand ein Endzustand ist.

(b) Wir wandeln den NFA also zunächst mittels Potenzmengenkonstruktion in einen DFA um:



Jeder Zustand im DFA ist ein Endzustand. Damit gilt $L = \Sigma^*$.

Aufgabe 3. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache

$$L = \Sigma^* \setminus \{ww \mid w \in \Sigma^*\} = \overline{\{ww \mid w \in \Sigma^*\}}$$

erzeugt.
Hinweis: Für jedes $w \in L$ gerader Länge gibt es Wörter $x, y, u, v \in \Sigma^*$ so, dass $w = xayubv$ (oder $w = xbyuav$) ist und $|x| = |u|$ bzw. $|y| = |v|$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 3. Wir unterscheiden zwei Fälle, Wörter gerader Länge und Wörter ungerader Länge.

Wörter gerader Länge

Der Hinweis ist so zu verstehen, dass sich jedes Wort $w \in L$ mit Länge $2n$ in w_1w_2 unterteilen lässt, wobei w_1 und w_2 Wörter der Länge n sind, die sich an mindestens einer Stelle unterscheiden.

Da die Wörter x, y, u, v beliebig sein können, solange $|x| = |u|$ und $|y| = |v|$, ist die Menge der Wörter der Form $w = xayubv$ gleich der Menge der Wörter der Form $xay'u'bv$ (analog für den Fall $w = xbyuav$), so dass $w = w_1'w_2'$ und wobei $w_1' = xay'$ und $w_2' = u'bv$ (bzw. $w_1' = xby'$ und $w_2' = u'av$) mit $|x| = |y'|$ und $|u'| = |v|$. Einfach gesagt: In der Mitte steht nach wie vor das gleiche Wort $yu = y'u'$, allerdings teilen wir dieses Wort nun so auf, dass y' die Länge von u und x hat und u' die Länge von y und v hat.

Wörter der Form xay' mit $|x| = |y'|$ können wir mit den Produktionen $\{A \to XAX \mid a,\ X \to a \mid b\}$ aus A erzeugen, Wörter der Form $u'bv$ mit $|u'| = |v|$ durch eine weitere Produktion $B \to XBX \mid b$ aus B.

Die Wörter $w \in L$ mit gerader Länge erhalten wir also mit der Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ mit

- $V = \{S, A, B, X\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P' = \{S \to AB \mid BA,\ A \to XAX \mid a,\ B \to XBX \mid b,\ X \to a \mid b\}$

Wörter ungerader Länge

Für alle $w \in \Sigma^*$ mit ungerader Länge gilt $w \in L$. Um diese Wörter zu erzeugen, können wir die Nicht-Terminale A und B „wiederverwenden", da A alle Wörter ungerader Länge mit einem a in dem Mitte erzeugt, B alle Wörter ungerader Länge mit einem b in der Mitte.

Grammatik

Eine kontextfreie Grammatik, die L erzeugt, ist also $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, A, B, X\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to A \mid B \mid AB \mid BA, A \to XAX \mid a, B \to XBX \mid b, X \to a \mid b\}$

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei L kontextfrei und nicht regulär. Dann ist auch L^* kontextfrei und nicht regulär.

(b) Sei L kontextfrei und sei L' nicht regulär. Dann ist $L'' = L \cup L'$ nicht regulär.

Lösung zu Aufgabe 4. (a) Die Aussage ist falsch: Sei L die Sprache aus Aufgabe 3, also

$$L = \overline{\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}}.$$

Dann ist L kontextfrei, denn in Aufgabe 3 haben wir gezeigt, dass wir L mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können. Außerdem ist L nicht regulär: Auf Blatt 7, Aufgabe 2b haben wir gezeigt, dass das Komplement von L, die Sprache $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$, nicht regulär ist. Da reguläre Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen sind, kann L also auch nicht regulär sein. Nun gilt $a, b \in Ł$. Daher ist $L^* = \{a, b\}^*$, also ist L^* regulär.

(b) Die Aussage ist ebenfalls falsch. Wir wählen $L = \overline{\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}}$ und $L' = \Sigma^* \setminus L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Mit den Überlegungen aus Aufgabenteil (a) ist L kontextfrei und L' nicht regulär. Es gilt aber $L'' = \{a, b\}^*$, also ist L'' regulär.