Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Ist das folgende Problem entscheidbar?
Gegeben: Ein nichtdeterministischer Kellerautomat M_1 mit beschränktem Keller (d.h. für jede Konfiguration (z, x, γ) ist $|\gamma| \leq K$ für ein festes K) und ein NFA M_2.
Frage: Gilt $L(M_1) \subseteq L(M_2)$?

Lösung zu Aufgabe 1. Sei $M_1 = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$. Wir haben bereits ein Verfahren kennengelernt, welches das Inklusionsproblem löst. Um das Verfahren anzuwenden, ist es aber notwendig, dass $L(M_1)$ regulär ist. Dies bedeutet, wir überprüfen zunächst, ob M_1 sich in einen NFA M_1' umwandeln lässt. In der Tat: Da die Anzahl der Zustände, sowie nach Voraussetzung auch die Anzahl aller möglichen Kellerinhalte endlich ist (das Kelleralphabet Γ ist ebenfalls endlich) können wir jedes Paar (z, γ) ($z \in Z$, $\gamma \in \Gamma^*$) mit einem Zustand $q_{z,\gamma}$ eines NFAs kodieren.

Wir erhalten einen NFA $M_1' = (Q, \Sigma, \Delta, q_{z_0,\#}, F)$, wobei Q und F gegeben sind durch $Q = \{q_{z,\gamma} \mid z \in Z, \gamma \in \Gamma^{\leq K}\}$ und $F = \{q_{z,\varepsilon} \mid z \in Z\}$. *Aufgabe:* Überlegen Sie sich, wie genau Δ aussehen muss.

Durch die ε-Übergänge im PDA können ε-Kanten im NFA entstehen, daher müssen wir den resultierenden NFA zunächst ε-frei machen. Dies geht aber (siehe Bemerkung in der Vorlesung) und wir erhalten einen ε-freien NFA M_1''. Da wir einen NFA M_1'' gefunden haben mit $L(M_1) = L(M_1'')$, ist unser Problem entscheidbar genau dann, wenn das Inklusionsproblem für reguläre Sprachen entscheidbar ist. Dies können wir dank der Vorlesung jedoch mit Ja beantworten.

Beachte: Wenn unbeschränkte Kellerinhalte erlaubt wären, ginge dieses Argument nicht.

Aufgabe 2. Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform über $\Sigma = \{a, b\}$ mit $V = \{S, X, Y, A, B\}$, wobei P gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to a \mid b \mid AA \mid BB \mid XA \mid YB \\ X &\to AS \\ Y &\to BS \\ A &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$$

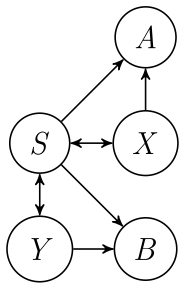
Überprüfen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung, ob $L(G)$ endlich ist.

Lösung zu Aufgabe 2. <u>1. Schritt</u>: Bestimmen der produktiven Variablen:

1. $W = \varnothing$ (intitial)
2. $W = \{A, B, S\}$, da $(A \to a) \in P$, $(B \to b) \in P$ und $(S \to a) \in P$
3. $W = \{A, B, S, X, Y\}$, da $(X \to AS) \in P$ und $(Y \to BS) \in P$ und $A, B, S \in W$

Alle Nicht-Terminale sind produktiv.

<u>2. Schritt</u>: Betrachte den Graphen (W, E) mit Kanten
$E = \{(S, A), (S, B), (S, X), (S, Y), (X, A), (X, S), (Y, B), (Y, S)\}$



Es existiert ein nicht-leerer Zyklus $S \to X \to S$, daher ist $|L(G)| = \infty$.

Aufgabe 3 (Wiederholung)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Sei L eine reguläre Sprache. Dann gilt

- L wird durch eine reguläre Grammatik erkannt
- L wird durch einen Kellerautomaten erkannt
- L enthält das leere Wort ε

(b) Sei $L = \{a^n b^m \mid \max(n, m) \leq 10\}$. Es gilt

- L ist regulär
- L ist kontextfrei
- L ist endlich

(c) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachte $L = \{aw \mid w \in \Sigma^*\}$ und $K = \{bw \mid w \in \Sigma^*\}$. Es gilt

- $\Sigma^* \setminus L = K$
- $\Sigma^+ \setminus L = K$
- $L \cap K = \varnothing$

(d) Für die regulären Ausdrücke $\alpha = a(bb)^*a$ und $\beta = ab^*a$ gilt

- $L(\alpha) \cap L(\beta) = \varnothing$
- $L(\alpha) \subseteq L(\beta)$
- $L(\alpha) \supseteq L(\beta)$

(e) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache. Dann gilt

- $L \setminus \{\varepsilon\}$ ist kontextfrei
- $\Sigma^* \setminus L$ ist kontextfrei
- L wird durch einen nicht-deterministischen Kellerautomat erkannt

(f) Eine Grammatik in Chomsky-Normalform

- ist eine reguläre Grammatik
- ist eine kontextfreie Grammatik.
- ist eine kontextsensitive Grammatik.

(g) Die Sprache $L = \{a^p \mid p \in P\}$ ist regulär, wenn

- P endlich ist
- $P = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$
- $P = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$

(h) Sei R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenzrelation einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. Es gilt

- $\text{index}(R_L) < \infty$
- Wenn L regulär ist, dann hat jeder DFA für L mindestens $\text{index}(R_L)$ Zustände.
- $x \; R_L \; x$ für alle $x \in \Sigma^*$.

(i) Welche der folgenden Objekte sind Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$?

- $\varnothing$
- ε
- $\{\varepsilon\}$

(j) Welche der folgenden Sprachen sind regulär?

- $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
- $\{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{a^n a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(k) Sei M ein NFA. Dann gilt

- M hat genau einen Anfangszustand
- M hat mindestens einen Endzustand
- Es gibt einen DFA, der die gleiche Sprache akzeptiert wie M

Lösung zu Aufgabe 3. (a) Die ersten zwei Aussagen sind wahr (jede reguläre Sprache ist auch kontextfrei und wird daher auch von einem Kellerautomaten erkannt). Die dritte Aussage ist falsch, z.B. ist die Sprache $L = \{a\}$ regulär und enthält nicht das leere Wort.

(b) Alle drei Aussagen sind wahr. Da $\max(n, m) \leq 10$ gefordert wird, ist die Sprache insbesondere endlich. Jede endliche Sprache ist regulär und jede reguläre Sprache ist auch kontextfrei.

(c) Die erste Aussage ist falsch (das leere Wort ist weder in L, noch in K enthalten). Die zweite Aussage ist richtig (jedes nicht-leere Wort über $\Sigma = \{a, b\}$ beginnt entweder mit a oder mit b). Die dritte Aussage ist ebenfalls richtig.

(d) Die erste Aussage ist falsch, z.B. gilt $aa \in L(\alpha)$ und $aa \in L(\beta)$. Es gilt $L(\alpha) = \{ab^{2n}a \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L(\beta) = \{ab^n a \mid n \in \mathbb{N}\}$, daher ist $L(\alpha) \subseteq L(\beta)$ (also ist die zweite Aussage richtig und die dritte Aussage falsch).

(e) Die erste Aussage ist wahr (siehe z.B. Folien 187 - 192). Die zweite Aussage ist falsch: Die Sprache $\{a, b\}^* \setminus \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist kontextfrei (siehe Blatt 9, Aufgabe 3), aber die Sprache $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist nicht kontextfrei (siehe Blatt 10, Aufgabe 3). Die dritte Aussage ist wahr.

(f) Die zweite und dritte Aussage sind wahr (Chomsky-Hierarchie), die erste Aussage ist falsch (es gibt kontextfreie Grammatiken, die nicht regulär sind).

(g) Die erste Aussage ist wahr (jede endliche Sprache ist regulär). Die zweite Aussage ist ebenfalls war, wir können z.B. einen endlichen Automaten zu dieser Sprache konstruieren. Die dritte Aussage ist falsch, in Übungsblatt 7, Aufgabe 3(a), haben wir gezeigt, dass die Sprache nicht regulär ist.

(h) Die erste Aussage ist falsch (da L nicht unbedingt regulär sein muss). Die zweite Aussage ist richtig (Stichwort Minimalautomat). Die dritte Aussage ist ebenfalls richtig, denn Äquivalenzrelationen sind reflexiv.

(i) $\varnothing$ und $\{\varepsilon\}$ sind Sprachen. Das leere Wort ε selbst ist keine Sprache (da eine Sprache eine *Menge* von Wörtern ist).

(j) Alle drei Sprachen sind regulär. Übungsaufgabe: Finden Sie jeweils einen Automaten für jede der drei Sprachen!

(k) Die erste und zweite Aussage sind falsch. Es gibt NFAs mit mehreren Anfangszuständen, und es gibt NFAs, die keinen Endzustand besitzen. Aussage drei ist wahr (Stichwort Potenzmengenkonstruktion).