

**Klausur zur Vorlesung  
„Grundlagen der Theoretischen Informatik“  
SS 2019 / 20. August 2019**

**Vorname:** \_\_\_\_\_

**Nachname:** \_\_\_\_\_

**Matrikelnummer:** \_\_\_\_\_

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	20	
2	9	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	6	
9	6	
10	4	
11	3	
12	6	
13	6	
14	4	
15	6	
16	0	
$\Sigma$	100	

## Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **180 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **50 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**16 Aufgaben** auf 15 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

## Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise grafisch oder tabellarisch angegeben werden.
- In den WHILE- und LOOP-Programmen dürfen Sie die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte Subtraktion und für eine Variable  $x$  die Bedingung `IF  $x = 0$  THEN  $P$  END` als WHILE- bzw. LOOP-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von  $\mu$ - bzw. primitiv-rekursiven Funktionen und für WHILE- und LOOP-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 1.** (20 Punkte) In jeder der 10 Teilaufgaben gibt es drei mögliche Antworten, von denen eine, zwei oder auch alle drei Antworten richtig sein können. Für jede Teilaufgabe gibt es 2 Punkte, die nur vergeben werden, wenn **alle** Kreuze innerhalb der Teilaufgabe richtig gesetzt wurden.

- (1) Welche der folgenden Objekte sind Sprachen über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ ?  
  $\emptyset$      $\varepsilon$      $\{\varepsilon\}$
- (2) Seien  $K, L$  Sprachen. Dann gilt ...  
  $(K \cup L)^* = (K^* L^*)^*$ .  
  $(K \cup L)^* = (K^* \cup L^*)^*$ .  
  $(K \cup L)^* = K^* \cup L^*$ .
- (3) Sei  $M$  ein NFA. Dann gilt ...  
  $M$  hat mindestens einen Anfangszustand.  
  $M$  hat mindestens einen Endzustand.  
  $M$  akzeptiert eine reguläre Sprache.
- (4) Welche der folgenden Sprachen ist regulär?  
  $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$   
  $\{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
  $\{a^n a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (5) Welche der folgenden Sprachen ist kontextfrei?  
  $\{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$   
  $\{a^i b^j c^j d^i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$   
  $\{a^i b^i c^j d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
- (6) Jede kontextfreie Grammatik ...  
 ist eine reguläre Grammatik.  
 ist eine kontextsensitive Grammatik.  
 ist in Chomsky-Normalform.
- (7) Für jede semi-entscheidbare Sprache  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  gilt  
  $L$  ist rekursiv aufzählbar.  
  $L$  ist entscheidbar.  
  $\chi_L$  ist berechenbar.
- (8) Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar?  
  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\}$   
  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ hält angesetzt auf ein leeres Band}\}$   
  $\emptyset$
- (9) Für welche Argumente ist  $\mu f$  mit folgender Funktion  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  definiert?  

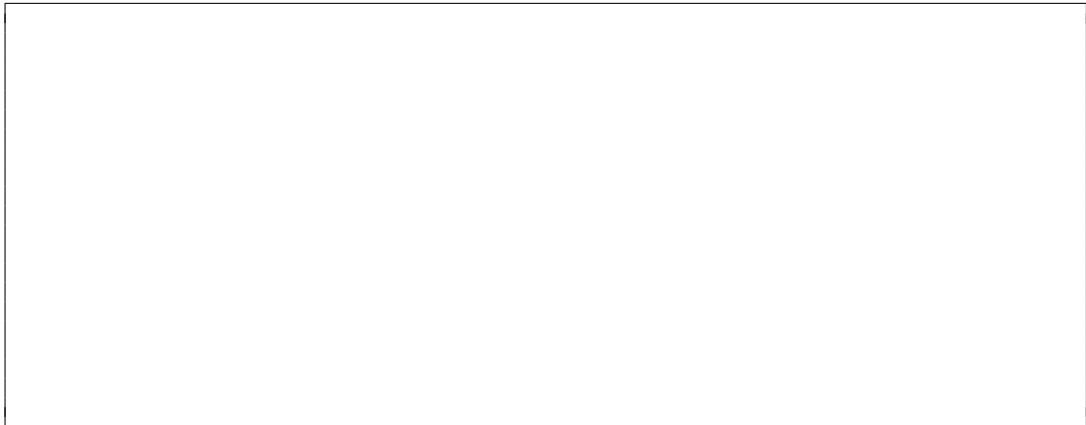
$$f(n, x) = \text{sub}(x^2 + 5, n)$$
 0    5    10
- (10) Für jede berechenbare Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gilt  
  $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$  ist entscheidbar.  
  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $g(x) = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$  ist berechenbar.  
  $f \circ f \circ f$  ist berechenbar.

Name:

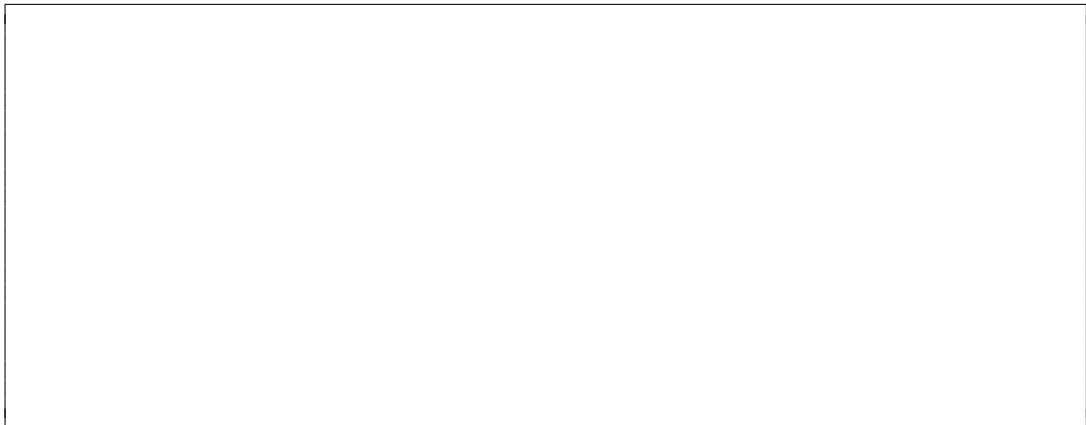
Matrikelnummer:

**Aufgabe 2.** (9 Punkte) Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

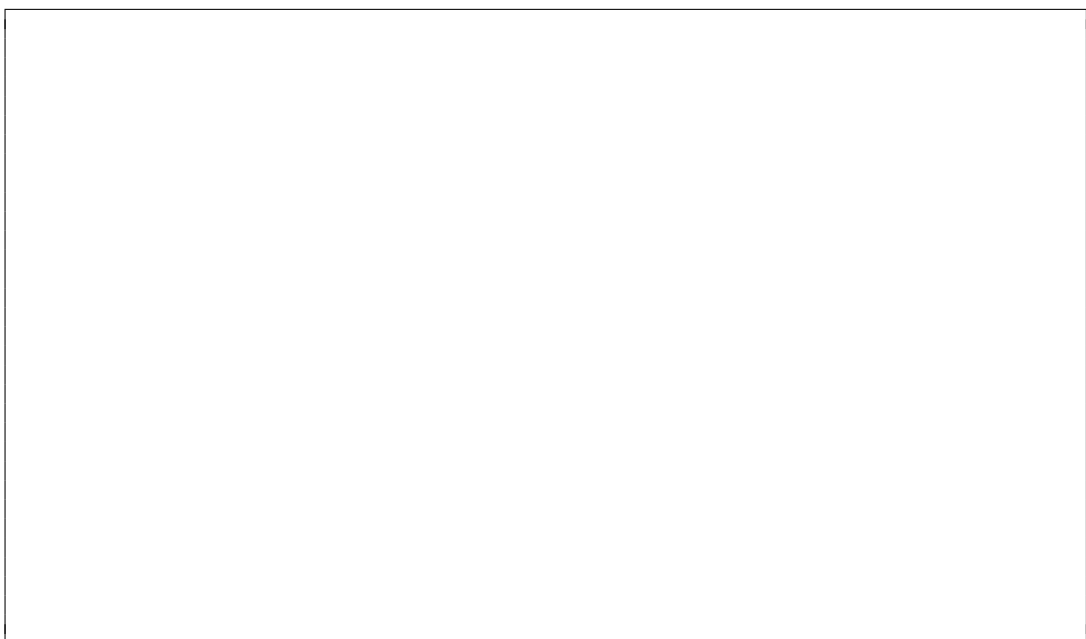
(a)  $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens zweimal das Teilwort } ab\}$



(b)  $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } b \text{ und } |w| \text{ ist ungerade}\}$



(c)  $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält kein } a \text{ oder } |w| \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\}$



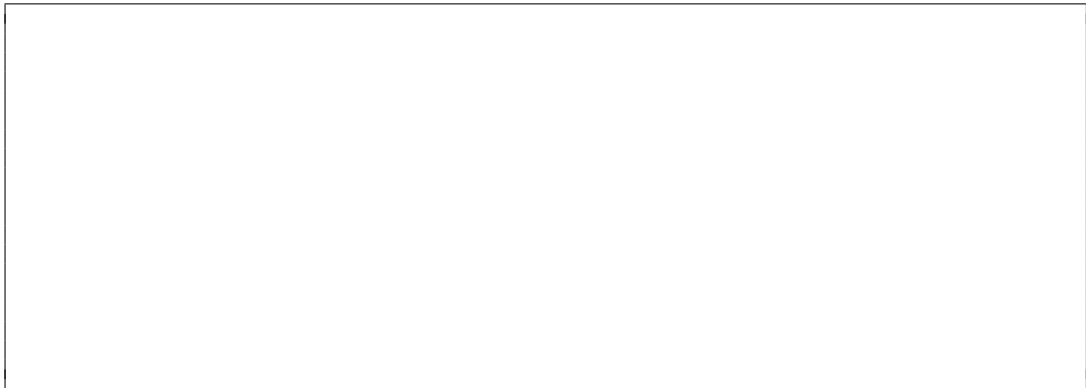
Name:

Matrikelnummer:

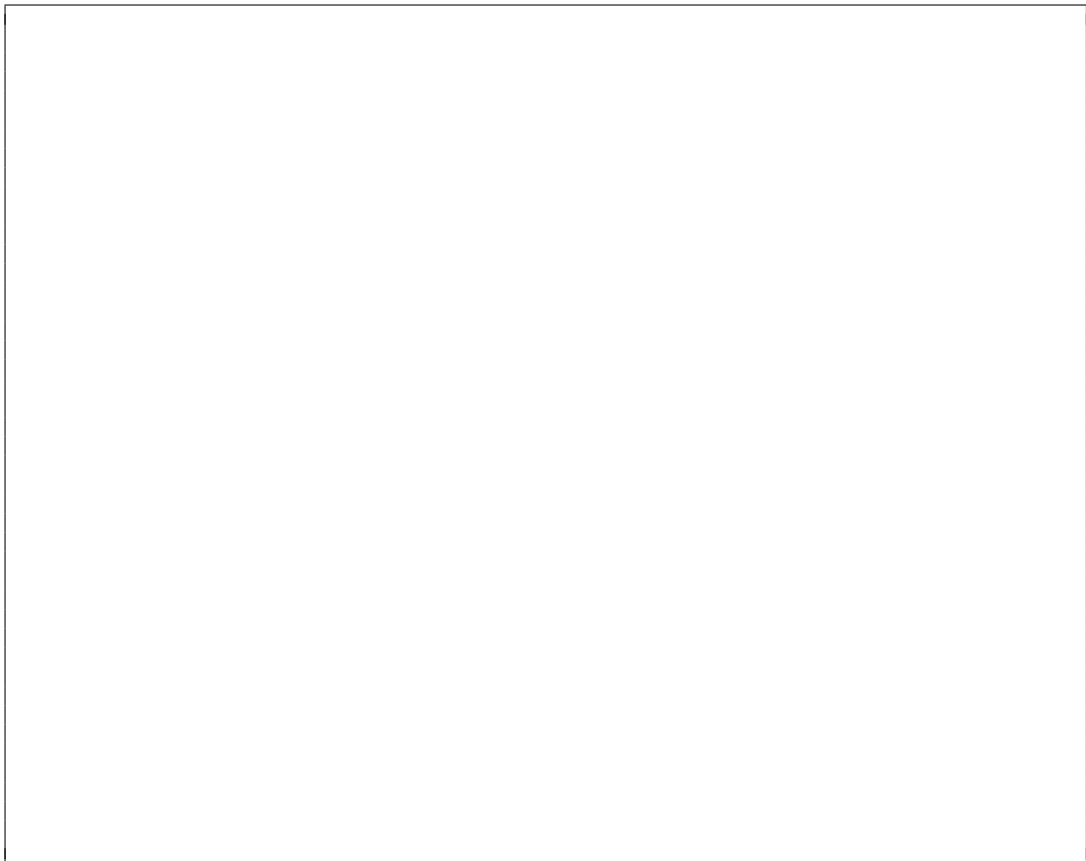
**Aufgabe 3.** (6 Punkte) Gegeben sei der NFA  $M = (\{1, 2, 3, 4\}, \{a, b\}, \delta, \{1\}, \{2, 4\})$ , wobei  $\delta$  gegeben ist durch:

$\delta$	$a$	$b$
1	$\{1, 2\}$	$\emptyset$
2	$\{4\}$	$\{1, 2\}$
3	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$\{1, 2, 4\}$	$\{2, 3\}$

(a) Zeichnen Sie das zu  $M$  gehörige Automatendiagramm.



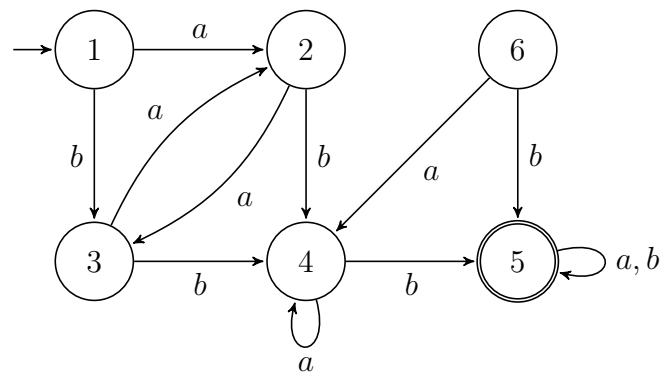
(b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu  $M$  äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 4.** (6 Punkte) Minimieren Sie den folgenden DFA mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. **Geben Sie an, welche Zustandspaare in welcher Reihenfolge markiert werden, und zeichnen Sie den erhaltenen minimalen DFA.**



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 5.** (6 Punkte) Gegeben sei folgende Sprache  $L \subseteq \{a, b\}^*$  mit

$$L = \{a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}, m \text{ gerade}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $L$  nicht regulär ist.

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 6.** (6 Punkte) Geben Sie einen Kellerautomaten an, der die Sprache

$$L = \{(ab)^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

erkennt.



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 7.** (6 Punkte) Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}, \{a, b, c\}, P, S),$$

wobei  $P$  gegeben ist durch

$$S \rightarrow AD \mid FG$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow c$$

$$D \rightarrow SE \mid BC$$

$$E \rightarrow BC$$

$$F \rightarrow AF \mid a$$

$$G \rightarrow BG \mid CG \mid b$$

$$H \rightarrow SC$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort  $aabcb$  in  $L(G)$  enthalten ist.

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 8.** (6 Punkte) Geben Sie für

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \text{ ist durch drei teilbar}\}$$

eine kontextfreie Grammatik an.

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 9.** (6 Punkte) Sei  $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_f\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_f\})$  die deterministische 2-Band-Turingmaschine mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, (d, \square)) &= (z_0, (d, d), (R, R)), & d \in \{a, b\} \\ \delta(z_0, (c, \square)) &= (z_1, (c, \square), (N, L)) \\ \delta(z_1, (c, b)) &= (z_2, (c, \square), (N, L)) \\ \delta(z_2, (c, a)) &= (z_3, (c, \square), (N, L)) \\ \delta(z_3, (c, d)) &= (z_3, (c, d), (N, L)), & d \in \{a, b\} \\ \delta(z_3, (c, \square)) &= (z_4, (c, \square), (R, R)) \\ \delta(z_4, (d, d)) &= (z_4, (d, d), (R, R)), & d \in \{a, b\} \\ \delta(z_4, (\square, \square)) &= (z_f, (\square, \square), (N, N)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta(z_0, (i, j)) &= (z_0, (i, j), (N, N)) \\ \delta(z_1, (i, j)) &= (z_1, (i, j), (N, N)) \\ \delta(z_2, (i, j)) &= (z_2, (i, j), (N, N)) \\ \delta(z_3, (i, j)) &= (z_3, (i, j), (N, N)) \\ \delta(z_4, (i, j)) &= (z_4, (i, j), (N, N)) \end{aligned}$$

für alle anderen Tupel  $(i, j)$ .

- (a) Akzeptiert  $M$  das Wort  $w_1 = abc$ ?  ja  nein  
 (b) Akzeptiert  $M$  das Wort  $w_2 = ababcab$ ?  ja  nein  
 (c) Welche Sprache akzeptiert  $M$ ?

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 10.** (4 Punkte) Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die folgende Funktion  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  berechnet:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2^x, & \text{falls } y \leq z, \\ \max(2x, y^2), & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 11.** (3 Punkte) Geben Sie an, welche partielle Funktion  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  das folgende WHILE-Programm berechnet (Eingabevariablen sind  $x_1$  und  $x_2$ , die Ausgabevariable ist  $x_1$ ):

```
 $x_3 := x_1;$   
 $x_1 := 1;$   
WHILE  $x_3 \neq 0$  DO  
   $x_1 := x_1 \cdot x_3;$   
   $x_3 := x_3 - 1$   
END;  
 $x_4 := x_2 - 42;$   
 $x_5 := 13 - x_2;$   
IF  $x_4 = 0$  THEN  
  IF  $x_5 = 0$  THEN  
    WHILE  $x_2 \neq 0$  DO  
       $x_1 := x_1 + 1$   
    END  
  END  
END  
END
```

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 12.** (6 Punkte) Geben Sie für die folgenden partiellen Funktionen jeweils ein WHILE-Programm an, das sie berechnet.

(a)  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(a, b) = \begin{cases} b, & \text{falls } 5 < a \leq 42, \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$

(b)  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $g(n) = \begin{cases} \text{undefiniert,} & \text{wenn } n^2 > 50, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 13.** Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen  $f: \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{N}$  und  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  primitiv-rekursiv sind.

(a) (4 Punkte)  $f(x, y) = y! + (y + 1)! + \cdots + (y + x)!$

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass  $h(y) = y!$  primitiv-rekursiv ist.


(b) (2 Punkte)  $g(n) = \sum_{k=0}^n ((k + 1)^2 + 1)^2$

Name:

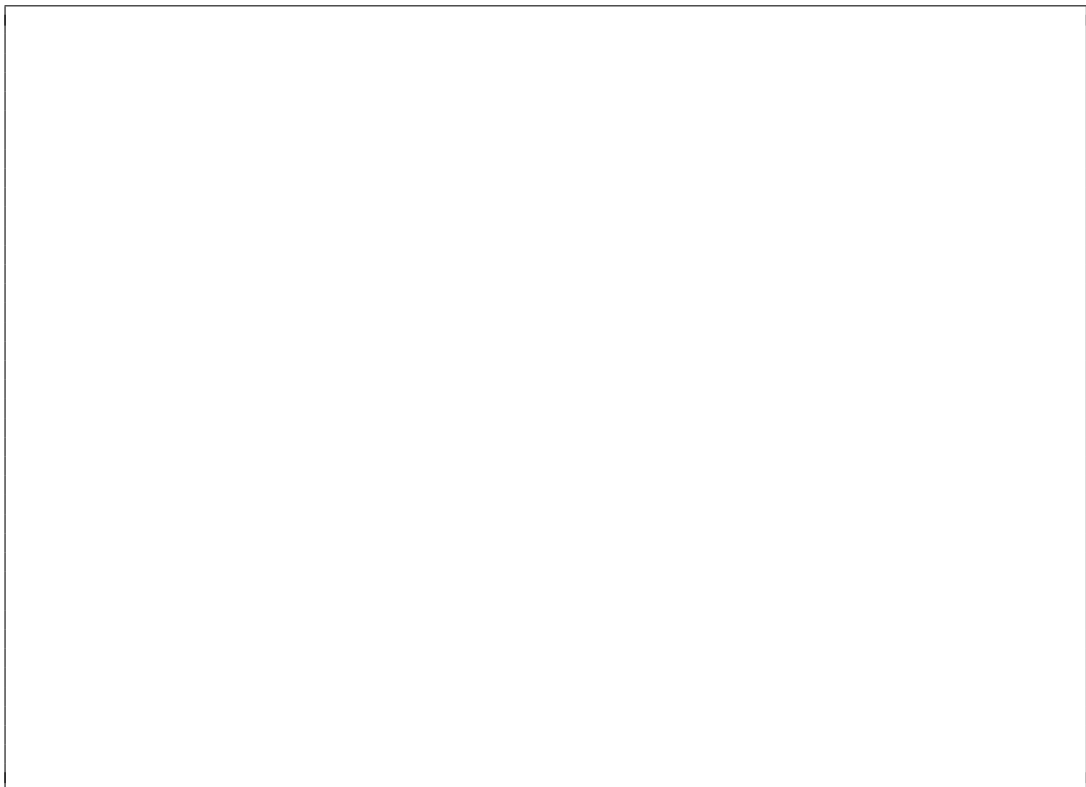
Matrikelnummer:

**Aufgabe 14.** (4 Punkte) Geben Sie an, welche Funktionen von  $\mu f$  und  $\mu g$  berechnet werden, wobei  $f$  und  $g$  wie folgt definiert sind.

(a)  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(n, x, y) = 5y - n^4x$



(b)  $g: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $g(n, x, y) = y + n(x - 2)$



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 15.** (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 2n, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Geben Sie eine Turing-Maschine an, die  $f$  berechnet.

*Hinweis:* Beachten Sie, dass die Eingabezahl  $n$  als Binärzahl auf dem Band steht (z.B. kodiert 111 die Eingabezahl 7). Denken Sie außerdem daran, dass der Lesekopf am Ende auf dem ersten Symbol der Ausgabe stehen muss. Machen Sie sich an genügend (nicht zu komplizierten) Beispielen klar, wie die Turing-Maschine arbeiten muss!



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 16.** (5 Punkte (Bonus))

Zeigen Sie, dass folgende Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $\mu$ -rekursiv ist:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x), & \text{falls } x \text{ Zweierpotenz ist,} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie dürfen hierzu die  $\mu$ -rekursive Funktion  $\text{eq}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  verwenden mit

$$\text{eq}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$