Klausur zur Vorlesung „Formale Sprachen und Automaten“

WS 2022/23 / 30. März 2023

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	14	
2	10	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	5	
9	6	
10	0	
Σ	65	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**
- Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**10 Aufgaben** auf 11 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise grafisch oder tabellarisch angegeben werden.

Aufgabe 1. (14 Punkte) Beantworten Sie die folgenden sieben Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

(1) Gibt es nur endlich viele reguläre Sprachen? Begründen Sie Ihre Antwort!

> **Lösung:** Nein, beispielsweise ist $L_n = \{a^n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ regulär.

(2) Sei M ein NFA mit n Zuständen. Hat ein DFA M' mit $L(M) = L(M')$ stets 2^n viele Zustände? Begründen Sie Ihre Antwort!

> **Lösung:** Falls M bereits ein DFA ist, können wir $M' = M$ nehmen und erhalten einen DFA mit nur n Zuständen.

(3) Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar: (1) Leerheitsproblem für reguläre Sprachen, (2) Wortproblem für kontextfreie Sprachen, (3) Schnittproblem für kontextfreie Sprachen, (4) Wortproblem für Typ-0-Sprachen.

> **Lösung:** (1)+(2)

(4) Geben Sie eine reguläre Sprache L und eine Sprache L' an, so dass $L'' = L \cap L'$ nicht kontextfrei ist.

> **Lösung:** Mit $L = \{a, b, c\}^*$ und $L' = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ gilt $L'' = L'$ (und diese Sprache ist nicht kontextfrei).

(5) Geben Sie mindestens 5 Operationen an, unter denen reguläre Sprachen abgeschlossen sind.

Lösung: Vereinigung, Schnitt, Kleene-Stern, Konkatenation, Komplement

(6) Geben Sie eine Sprache an, die von einem Kellerautomaten akzeptiert wird, aber nicht von einem regulären Ausdruck erzeugt werden kann!

Lösung: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

(7) Gegeben seien die folgenden Sprachen:

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$,
- $L_2 = \{a^i b^j \mid i + j = 3\}$,
- $L_3 = L(\alpha)$ mit $\alpha = (a^* \mid ab)^*$
- $L_4 = L(G)$ mit $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to AA, A \to AA \mid a \mid b \mid \varepsilon\}, S)$

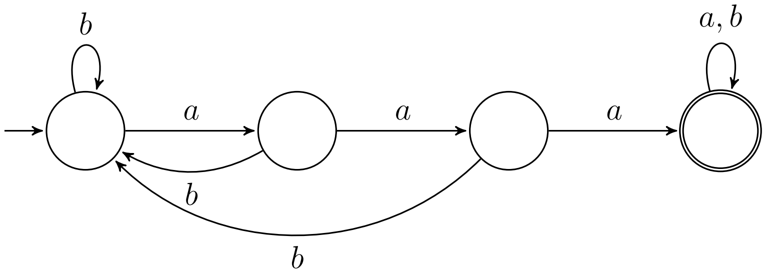
In welchen dieser Sprachen ist das Wort $w = aba$ enthalten?

Lösung: L_3 und L_4

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

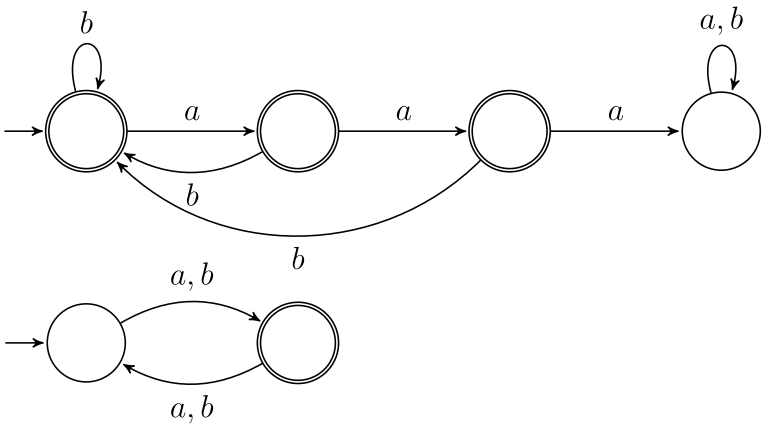
(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } aaa\}$

Lösung: $(a \mid b)^*(aaa)(a \mid b)^*$



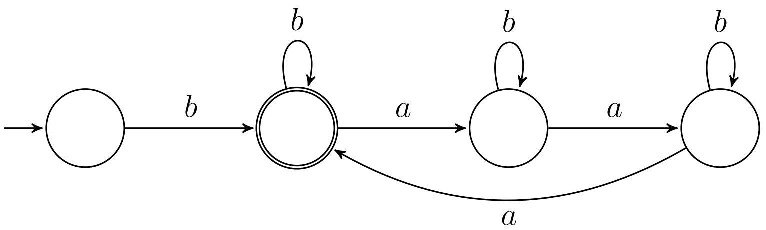
(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält nicht das Teilwort } aaa \text{ oder } |w| \text{ ist ungerade}\}$

Lösung: $(b|ab|aab)^*(\varepsilon|a|aa)|(aa|ab|ba|bb)^*(a|b)$



(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält eine durch 3 teilbare Anzahl } a's \text{ und beginnt mit } b\}$

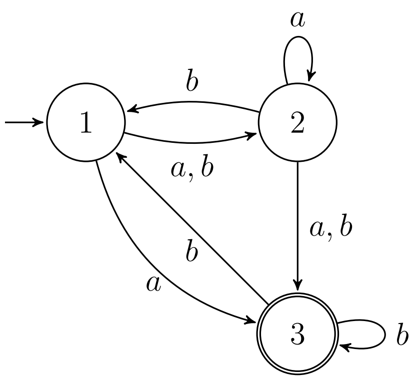
Lösung: $b(b^*ab^*ab^*a)^*b^*$



Aufgabe 3. (6 Punkte) Gegeben sei der NFA $M = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta, \{1\}, \{3\})$, wobei δ gegeben ist durch:

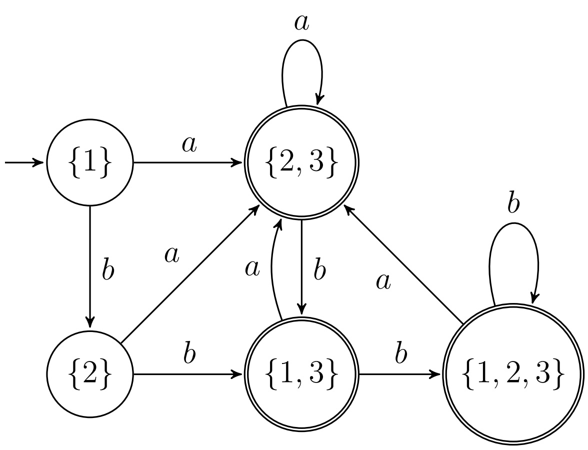
δ	a	b
1	$\{2,3\}$	$\{2\}$
2	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$
3	$\emptyset$	$\{1,3\}$

(a) Zeichnen Sie das zu M gehörige Automatendiagramm.



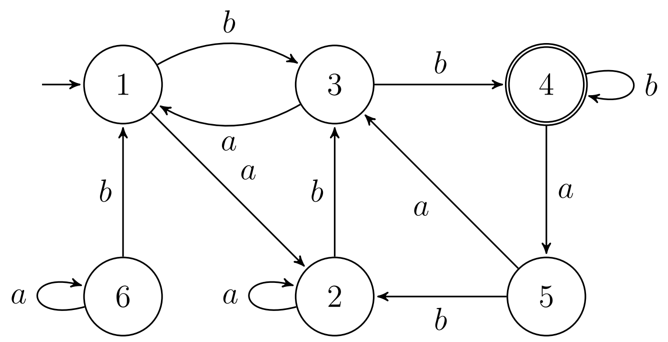
Lösung:

(b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.



Lösung:

Aufgabe 4. (6 Punkte) Minimieren Sie den folgenden DFA mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. **Geben Sie an, welche Zustandspaare in welcher Reihenfolge markiert werden, und zeichnen Sie den erhaltenen minimalen DFA**.

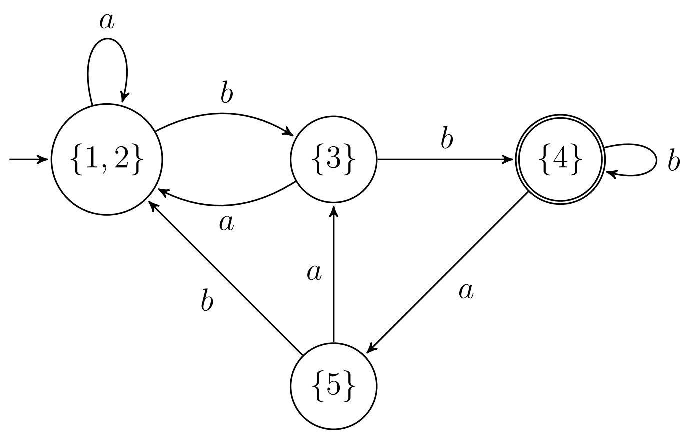


Lösung: Zustand 6 wird entfernt, weil nicht erreichbar.

2		-	-	-
3	3	4	-	-
4	1	1	1	-
5	5	6	2	1
	1	2	3	4

1. Trenne End- und Nichtendzustände.
2. Markiere $(5, 3)$ wegen $\delta(5, b) = 2$ und $\delta(3, b) = 4$ und $(4, 2)$ markiert.
3. Markiere $(3, 1)$ wegen $\delta(3, b) = 4$ und $\delta(1, b) = 3$ und $(4, 3)$ markiert.
4. Markiere $(3, 2)$ wegen $\delta(3, b) = 4$ und $\delta(2, b) = 3$ und $(4, 3)$ markiert.
5. Markiere $(5, 1)$ wegen $\delta(5, a) = 3$ und $\delta(1, a) = 2$ und $(3, 2)$ markiert.
6. Markiere $(5, 2)$ wegen $\delta(5, a) = 3$ und $\delta(2, a) = 2$ und $(3, 2)$ markiert.

1 und 2 sind erkennungsäquivalent.



Aufgabe 5. (6 Punkte) Gegeben sei folgende Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ mit

$$L = \{a^n b^m \mid n + m \text{ ist durch 3 teilbar oder } m = 2n + 1\}.$$

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Lösung: Pumping Lemma mit $w = a^n b^{2n+1}$:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $w = a^n b^{2n+1}$. Dann ist $w \in L$ und $|w| \geq n$. Sei $w = xyz$ eine Zerlegung von w mit $|xy| \leq n$ und $|y| \geq 1$. Also gibt es $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $x = a^k$, $y = a^\ell$ und $z = a^{n-k-\ell} b^{2n+1}$. Mit Pumpfaktor 4 erhalten wir

$$xy^4 z = a^k a^{4\ell} a^{n-k-\ell} b^{2n+1} = a^{n+3\ell} b^{2n+1}.$$

Da $\ell \geq 1$ gilt nun $2n + 1 \neq 2(n + 3\ell) + 1$ und $2n + 1 + n + 3\ell = 3n + 3\ell + 1$ ist nicht durch 3 teilbar, also $xy^4 z \notin L$. Somit ist L nach dem Pumping Lemma nicht regulär.

Aufgabe 6. (6 Punkte) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, wobei $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{\#, A\}$ und

(1) $\delta(z_0, a, \#) = \{(z_0, A)\}$

(2) $\delta(z_0, a, A) = \{(z_1, A)\}$

(3) $\delta(z_1, a, A) = \{(z_2, A)\}$

(4) $\delta(z_2, a, A) = \{(z_0, AA)\}$

(5) $\delta(z_0, b, A) = \{(z_3, \varepsilon)\}$

(6) $\delta(z_3, b, A) = \{(z_3, \varepsilon)\}$.

Die Modifikationen aus Teilaufgabe (b) wird für (c) nicht beibehalten.

(a) Welche Sprache wird von dem Kellerautomaten erkannt?

Lösung: $L(M) = \{a^{3n+1}b^{n+1} \mid n \geq 1\}$

(b) Anstelle von Transition (1) nehmen wir (1*) $\delta(z_0, a, \#) = \{(z_0, \varepsilon)\}$. Welche Sprache erkennt der Automat nun?

Lösung: $L(M) = \{a\}$

(c) Ersetze Transition (1) durch
(1**) $\delta(z_0, a, \#) = \{(z_1, A)\}$
und ersetze Transition (4) durch
(4*) $\delta(z_2, a, A) = \{(z_0, A)\}$.
Welche Sprache erkennt der Kellerautomat nach dieser Modifikation?

Lösung: $L(M) = \{a^{3n}b \mid n \geq 1\}$

Aufgabe 7. (6 Punkte) Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P : S &\to AC \mid BB \mid BA \\ A &\to BC \mid AB \mid a \\ B &\to BC \mid b \\ C &\to CA \mid c. \end{aligned}$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort *bbcabb* in $L(G)$ enthalten ist.

Lösung: Der CYK-Algorithmus liefert folgende Tabelle:

Länge	b	b	c	a	b	b
1	B	B	C	A	B	B
2	S	A, B	C	A	S	-
3	S	S, A, B	C	A	-	-
4	S	S, A, B	C	-	-	-
5	S	S, A, B	-	-	-	-
6	S	-	-	-	-	-

Also ist $bbcabb \in L(G)$.

Aufgabe 8. (5 Punkte) Geben Sie für

$$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w = a^n b^{2n+3m} c^m, n, m \geq 1\}$$

eine kontextfreie Grammatik an.

Lösung: Es gilt $L(G) = L$ mit $G = (\{S, A, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei

$$\begin{aligned} P:\quad & S \to AC \\ & A \to aAbb \mid abb \\ & C \to bbbCc \mid bbbc. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. (6 Punkte) Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_f\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_f\})$ eine deterministische Turingmaschine mit

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, a) &= (z_0, a, R) \\
\delta(z_0, b) &= (z_1, b, R) \\
\delta(z_1, a) &= (z_1, a, R) \\
\delta(z_1, b) &= (z_2, b, R) \\
\delta(z_2, a) &= (z_2, a, R) \\
\delta(z_2, b) &= (z_0, b, R) \\
\delta(z_0, \square) &= (z_f, \square, N) \\
\delta(z_1, \square) &= (z_1, \square, N) \\
\delta(z_2, \square) &= (z_2, \square, N)
\end{aligned}$$

(a) Akzeptiert M das Wort $w_1 = ababb$? √ **ja** ◯ nein

(b) Akzeptiert M das Wort $w_2 = abbabba$? ◯ ja √ **nein**

(c) Welche Sprache akzeptiert M?

Lösung: $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{Anzahl b's in } w \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

Aufgabe 10. (5 Punkte (Bonus)) Die Folge $(t_n)_{n\geq 0}$ der *Tribonacci-Zahlen* ist definiert durch $t_0 = 1, t_1 = 1, t_2 = 2$ und

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{a^{t_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Lösung: Zunächst zeigen wir induktiv, dass $t_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für den Induktionsanfang ist dies bei t_0, t_1 und t_2 erfüllt. Im Induktionsschritt erhalten wir

$$t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n \geq n + 2 + n + 1 + n = 3n + 3 > n$$

für alle $n \geq 0$.

Wir beweisen nun, dass L nicht regulär ist mit Hilfe des Pumping-Lemmas. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{t_{n+2}} \in L$, dann gilt $|x| \geq n$. Betrachte alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \geq n$. Wir haben $u = a^k$, $v = a^\ell$, $w = a^m$, wobei $\ell + k + m = t_{n+2}$. Wähle den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachte $uv^iw = a^{t_{n+2}+\ell}$. Zu zeigen ist nun, dass t_{n+2} keine Tribonacci-Zahl ist, wobei $1 \leq \ell \leq n$. Wir zeigen, dass $t_{n+2} < t_{n+2} + \ell < t_{n+3}$. Die erste Ungleichung ist klar ($\ell \geq 1$). Weiterhin gilt

$$t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n \geq t_{n+2} + n + 1 + n > t_{n+2} + \ell.$$

Da die Folge der Tribonacci-Zahlen monoton wachsend ist, entspricht $t_{n+2} + \ell$ also keiner Tribonacci-Zahl. Damit ist L nicht regulär.