Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$

(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$

(c) $\bigcup_{a\in\{1,2,3,4,5\}}\{\frac{a}{2}, 1 + \frac{a}{2}\}$

(d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n, 2n\}$

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}} = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Erklärung:
2^M ist die Notation für die **Potenzmenge** von M, also der Menge aller Teilmengen von M.

$2^{\{1,2,3\}} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ und
$2^{\{1,2\}} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

$2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$ enthält genau die Elemente, die in der Menge $2^{\{1,2,3\}}$ enthalten sind, aber nicht in der Menge $2^{\{1,2\}}$.

(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \varnothing$

Formale Begründung: Angenommen, es existiert ein $x \in \mathbb{N}$, sodass $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$. Dann muss x für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ enthalten sein (nach Definition der Schnittmenge). Es ist allerdings $x \notin \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq x + 1\}$, somit erhalten wir einen Widerspruch zur unserer Annahme.

Intuition:
Wir bilden den Schnitt über die folgenden Mengen:
$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$
$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 1\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$

$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 2\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$
$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...\}$
....
$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \{n, n+1, n+2, n+3, ...\}$
...
(für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge, wobei eine Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ alle natürlichen Zahlen ab der Zahl n enthält.)

Geht man zum Beispiel davon aus, dass in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ die Zahl 0 enthalten ist, so müsste (nach Definition der Schnittmenge) 0 für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ enthalten sein. Aber bereits bei der Menge $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ ist dies nicht der Fall. Schaut man sich eine beliebige natürliche Zahl x an, so kann auch diese nicht in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ liegen, da sie z.B. in der $(x+2)$-ten Menge ($\{x+1, x+2, x+3, x+4, \dots\}$) nicht enhalten ist.

(c)

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{a\in\{1,2,3,4,5\}} \left\{\frac{a}{2}, 1+\frac{a}{2}\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{2}{2}, 1+\frac{2}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{\frac{4}{2}, 1+\frac{4}{2}\right\} \cup \left\{\frac{5}{2}, 1+\frac{5}{2}\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\} \cup \{1, 2\} \cup \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\} \cup \{2, 3\} \cup \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

(d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n, 2n\} = \mathbb{N}$

Erklärung:
Sei $A_n := \{n, 2n\}$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n, 2n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Um formal die Gleichheit der Mengen zu zeigen, zeigen wir die beiden Inklusionen ($A \subseteq \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \subseteq A$).

$A \subseteq \mathbb{N}$: Jede der Mengen A_n enthält nur natürliche Zahlen ($n, 2n \in \mathbb{N}$), somit auch die Vereinigung der Mengen $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

$\mathbb{N} \subseteq A$: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n \in A_n = \{n, 2n\}$, und somit in der Vereinigung der Mengen $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ enthalten. Da dies für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\mathbb{N} \subseteq A$.

Aufgabe 2. Seien A, B, C Mengen.

(a) Angenommen $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$ und $B \cap C \neq \varnothing$. Gilt dann auch $A \cap B \cap C \neq \varnothing$?

(b) Was ist mit der Rückrichtung?

Lösung zu Aufgabe 2.

(a) Nein. Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned}
&A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{3,1\} \\
&A \cap B = \{2\} \neq \varnothing, A \cap C = \{1\} \neq \varnothing, B \cap C = \{3\} \neq \varnothing \\
&aber : A \cap B \cap C = \varnothing
\end{aligned}$$

(b) Ja, denn sei

$$\begin{aligned}
x \in A \cap B \cap C &\implies x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \\
x \in A \wedge x \in B &\implies x \in A \cap B \implies A \cap B \neq \varnothing \\
x \in A \wedge x \in C &\implies x \in A \cap C \implies A \cap C \neq \varnothing \\
x \in B \wedge x \in C &\implies x \in B \cap C \implies B \cap C \neq \varnothing
\end{aligned}$$

Oder in Worten:
Sei x Element der Menge $A \cap B \cap C$, so muss x auch Element der Menge A sein (nach Definition der Schnittmenge). Ebenso muss x auch Element der Menge B sein. Damit ist x aber auch Element von $A \cap B$ (wieder nach Definition der Schnittmenge), also ist $A \cap B$ nicht leer. $A \cap C \neq \varnothing$ und $B \cap C \neq \varnothing$ werden analog gezeigt.

Aufgabe 3. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Wenn $x \in A \cup B$, dann ist $x \in A$ und $x \in B$.

(b) Wenn $x \in A \cap B$, dann ist $x \in A$ oder $x \in B$.

(c) $|2^{A \times B}| = |2^A \times 2^B|$

(d) Sei $A \subseteq B$. Dann ist $A \cap B = A$.

Lösung zu Aufgabe 3.

(a) Falsch, z.B.: $A = \{1\}, B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2\}$
$2 \in A \cup B$ und $2 \in B$ aber $2 \notin A$

(b) Wahr, $x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B$, also auch
$x \in A \cap B \implies x \in A \vee x \in B$.

(c) Falsch, aus der Definition von $\times$ folgt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (wenn A, B endliche Mengen sind). Außerdem gilt $|2^A| = 2^{|A|}$.

Damit erhalten wir $|2^{A\times B}| = 2^{|A\times B|} = 2^{|A|\cdot|B|}$
aber $|2^A \times 2^B| = |2^A| \cdot |2^B| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^{|A|+|B|}$.

Wir finden leicht A und B mit $|A| \cdot |B| \neq |A| + |B|$, also gilt die Behauptung nicht.

Konkretes Gegenbeispiel
Sei $A = \varnothing, B = \{1\}$. Dann gilt $A \times B = \varnothing$, $2^A = \{\varnothing\}$ und $2^B = \{\varnothing, \{1\}\}$.

Somit ergibt sich $2^{A\times B} = \{\varnothing\}$ und $2^A \times 2^B = \{(\varnothing, \varnothing), (\varnothing, \{1\})\}$, also $|2^{A\times B}| = 1 \neq 2 = |2^A \times 2^B|$.

(d) Wahr. Die Gleichheit zweier Mengen M_1, M_2 können wir durch beidseitige Inklusion zeigen, d.h. wir zeigen, dass jedes Element von M_1 Element von M_2 ist und dass jedes Element von M_2 auch Element von M_1 ist (formal: $M_1 = M_2 \iff M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$).

Zur Erinnerung: $A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B$

Richtung 1 ($A \subseteq A \cap B$):
Sei $x \in A$. Aus $x \in A$ folgt wegen $A \subseteq B$, dass auch $x \in B$. Damit gilt $x \in A \wedge x \in B$ und somit $x \in A \cap B$.

Richtung 2 ($A \cap B \subseteq A$):
Sei $x \in A \cap B$, dann gilt:

$$x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B \implies x \in A \qquad \square$$

Aufgabe 4. Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Es gibt in Σ^* genau 2^n Wörter der Länge n.

(b) Es gibt in Σ^* genau $2^{n+1} - 1$ Wörter der Länge höchstens n.

Lösung zu Aufgabe 4.

(a) Sei W_n die Menge aller Wörter der Länge n.

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. $W_0 = \{\varepsilon\}$, also $|W_0| = 1 = 2^0$ ✓

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $|W_n| = 2^n$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

Sei w ein Wort der Länge $n + 1$. Dann gilt $w = vx$, wobei v ein Wort der Länge n ist und $x \in \{a, b\}$. (Jedes Wort der Länge $n + 1$ lässt sich eindeutig in ein Wort v der Länge n gefolgt von einem a oder b zerlegen.)
Also: $W_{n+1} = \bigcup_{v \in W_n} \{va, vb\}$, und daher $|W_{n+1}| = 2|W_n| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

(b) Sei $Q_n = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$ die Menge aller Wörter der Länge höchstens n.
Seien $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \neq m$. Dann gilt $W_k \cap W_m = \varnothing$.
Also ist $|Q_n| = \sum_{i=0}^{n} |W_i| = \sum_{i=0}^{n} 2^i$.
$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ können wir mittels vollständiger Induktion zeigen.

Induktionsanfang: Sei $n = 0$.

$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 2^{n+1} - 1$ ✓

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right) + 2^{n+1} &\overset{(IV)}{=} \left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1. \qquad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Welche Sprachen erzeugen die folgenden Grammatiken?

(a) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to AB,\ A \to aA,\ B \to b\}$$

(b) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to \varepsilon,\ S \to SS,\ S \to ab\}$$

(c) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to aB,\ B \to bC,\ C \to Ba,\ C \to b\}$$

Lösung zu Aufgabe 5.

(a) $L(G) = \varnothing$

Jede Satzform, die aus S abgeleitet werden kann, enthält mindestens ein Nichtterminal: Die einzige Produktion mit S auf der linken Seite ist $S \to AB$ und diese enthält auf der rechten Seite das Nichtterminal A. Die einzige Produktion mit A auf der linken Seite ist $A \to aA$ und diese enthält wiederum das Nichtterminal A auf der rechten Seite. Somit kann aus S (und ebenso aus A) nie ein Wort über dem Alphabet Σ abgeleitet werden.

(b) $L(G) = \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$

Formal sind die beiden Inklusionen $L(G) \subseteq \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$ und $\{(ab)^m \mid m \geq 0\} \subseteq L(G)$ zu zeigen:

$\{(ab)^m \mid m \geq 0\} \subseteq L(G)$: Sei $w \in \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$. Dann ist $w = (ab)^k$ für ein $k \geq 0$. Wir zeigen $w \in L(G)$, indem wir eine Ableitung für w aus S angeben: Wenn $k = 0$, wenden wir die Produktion $S \to \varepsilon$ an, um w abzuleiten. Wenn $k = 1$, leiten wir $w = ab$ aus S in einem Schritt durch die Produktion $S \to ab$ an. Ist $k > 1$ können wir in $k-1$ Schritten mit der Produktion $S \to SS$ die Satzform S^k aus S ableiten. Weiterhin können wir aus der Satzform S^k über die Produktion $S \to ab$ in weiteren k Schritten $w = (ab)^k$ ableiten. Damit gilt also $w \in L(G)$.

$L(G) \subseteq \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$: Jedes Wort $w \in \Sigma^*$, das aus S abgeleitet wird, ist eine Konkatenation der Terminalsymbole auf den rechten Seiten der Produktionen für S, d.h. aus den Wörtern ε und ab: Damit folgt $w \in \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$ für jedes Wort w, das aus S abgeleitet wird.

(c) $L(G) = \{ab^{n+2}a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Zum Verständnis kann es hilfreich sein die Grammatik umzuschreiben zu $P = \{S \to abC,\ C \to bCa,\ C \to b\}$ (dazu wird das B überall durch seine rechte Seite ersetzt).

Intuitiv: Aus dem Nichtterminal C werden Wörter $w \in \{b^n ba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abgeleitet, da man durch (wiederholtes) Anwenden der Produktion $C \to bCa$ gleich viele b's und a's erzeugt (jeweils zu Beginn und am Ende der Satzform) und in einem weiteren Schritt durch Anwenden der Produktion $C \to b$ das mittlere b erhält. Aus der einzigen Regel für S ($S \to abC$) erhalten wir dann

$$L(G) = \{abb^n ba^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{ab^{n+2}a^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(Um formal die Gleichheit der Mengen zu zeigen, sind auch hier eigentlich wieder die beiden Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ zu zeigen).