

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Wiederholen Sie noch einmal den Begriff *Homomorphismus* von Blatt 4. Ein Homomorphismus zwischen den Alphabeten Σ und Γ ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, welche jedem Alphabetsymbol $a \in \Sigma$ einen String über Γ zuweist und sich wie folgt auf beliebige Wörter über Σ erweitert: Sei $w = a_1 \cdots a_n$, dann ist $h(w) = h(a_1) \cdots h(a_n)$.

(a) Zeigen Sie, falls L eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus zwischen Σ und Γ ist, dann ist $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$ wieder regulär (über Γ).

Seien nun $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Wir wissen, dass L nicht regulär ist. Benutzen Sie die Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, um zu zeigen, dass folgende Sprachen ebenfalls nicht regulär sind.

(b) $L_b = \{a^m b^n \mid m, n \geq 0, m \neq n\} \cup L((a|b)^* ba(a|b)^*)$

(c) $L_c = \{b^n a^n \mid n \geq 0\}$

(d) $L_d = \{w \in \Sigma^* \mid \text{Die Anzahl der Zeichen } a \text{ und } b \text{ in } w \text{ sind gleich.}\}$

Aufgabe 2. Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Sei $A \cap B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(b) Sei $A \cup B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(c) Sei $A \cdot B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.

(d) Sei h ein Homomorphismus auf Σ und gelte $h(A) = B$. Wenn B regulär ist, dann ist A regulär.

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

(a) $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$

(b) $\{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

Aufgabe 4. Bekanntermaßen ist die Sprache

$$L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

regulär. Im Folgenden wird versucht zu beweisen, dass sie dies nicht ist. Finden Sie den Fehler.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{2^n}$. Dann ist $x \in L$ und $|x| = 2^n \geq n$. Betrachten wir alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, so ist $uv = a^l$ für ein l mit $1 \leq l \leq n$ und damit $v = a^k$ mit $1 \leq k \leq l$. Damit ist $uv^2w = a^{2n+k} \neq a^{2^n}$ und somit $uv^2w \notin L$. Somit ist L nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen nicht regulär.

Aufgabe 5. Prüfen Sie für jede der folgenden binären Relationen, welche der Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* erfüllt sind. Handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

- (a) “ \leq ” auf Σ^* mit $v \leq w$ genau dann, wenn es $u, x \in \Sigma^*$ gibt mit $uvx = w$.
- (b) “ $<$ ” auf Σ^* mit $v < w$ genau dann, wenn $|v| < |w|$.
- (c) $R_n \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ für ein $n \geq 2$ mit $v R_n w$ genau dann, wenn die Anzahl der a 's in v und die Anzahl der a 's in w den gleichen Rest bei Division durch n liefern.
- (d) $R \subseteq (\Sigma^*)^{10} \times (\Sigma^*)^{10}$ mit $(v_1, \dots, v_{10}) R (w_1, \dots, w_{10})$ genau dann, wenn $v_i R_i w_i$ ($1 \leq i \leq 10$), wobei alle R_i Äquivalenzrelationen sind.
- (e) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $x R y$ genau dann, wenn $x|y$.
- (f) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $R = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$
- (g) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $R = \{(x, y) \mid xy \leq 0\}$
- (h) $R \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit $R = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$
- (i) Kann es eine Relation geben, die nicht reflexiv, aber symmetrisch und transitiv ist?