Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Theoretischen Informatik“

SS 2019 / 20. August 2019

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	**Punktzahl**	**Erreicht**
1	20	
2	9	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	6	
9	6	
10	4	
11	3	
12	6	
13	6	
14	4	
15	6	
16	0	
Σ	100	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **180 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **50 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**16 Aufgaben** auf 15 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise grafisch oder tabellarisch angegeben werden.
- In den WHILE- und LOOP-Programmen dürfen Sie die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte Subtraktion und für eine Variable x die Bedingung IF $x = 0$ THEN P END als WHILE- bzw. LOOP-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von μ- bzw. primitiv-rekursiven Funktionen und für WHILE- und LOOP-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

Aufgabe 1. (20 Punkte) In jeder der 10 Teilaufgaben gibt es drei mögliche Antworten, von denen eine, zwei oder auch alle drei Antworten richtig sein können. Für jede Teilaufgabe gibt es 2 Punkte, die nur vergeben werden, wenn **alle** Kreuze innerhalb der Teilaufgabe richtig gesetzt wurden.

(1) Welche der folgenden Objekte sind Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$?

$\surd$ $\emptyset$ ◯ ε $\surd$ $\{\varepsilon\}$

(2) Seien K, L Sprachen. Dann gilt ...

$\surd$ $(K \cup L)^* = (K^* L^*)^*$.
$\surd$ $(K \cup L)^* = (K^* \cup L^*)^*$.
◯ $(K \cup L)^* = K^* \cup L^*$.

(3) Sei M ein NFA. Dann gilt ...

◯ M hat mindestens einen Anfangszustand.
◯ M hat mindestens einen Endzustand.
$\surd$ M **akzeptiert eine reguläre Sprache.**

(4) Welche der folgenden Sprachen ist regulär?

$\surd$ $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
$\surd$ $\{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\surd$ $\{a^n a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(5) Welche der folgenden Sprachen ist kontextfrei?

◯ $\{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
$\surd$ $\{a^i b^j c^j d^i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
$\surd$ $\{a^i b^i c^j d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

(6) Jede kontextfreie Grammatik ...

◯ ist eine reguläre Grammatik.
$\surd$ **ist eine kontextsensitive Grammatik.**
◯ ist in Chomsky-Normalform.

(7) Für jede semi-entscheidbare Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ gilt

$\surd$ L **ist rekursiv aufzählbar.**
◯ L ist entscheidbar.
◯ χ_L ist berechenbar.

(8) Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar?

$\surd$ $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|$ **ist Primzahl**$\}$
◯ $\{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w$ hält angesetzt auf ein leeres Band$\}$
$\surd$ $\emptyset$

(9) Für welche Argumente ist μf mit folgender Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert?

$$f(n, x) = \text{sub}(x^2 + 5, n)$$

$\surd$ 0 $\surd$ 5 $\surd$ 10

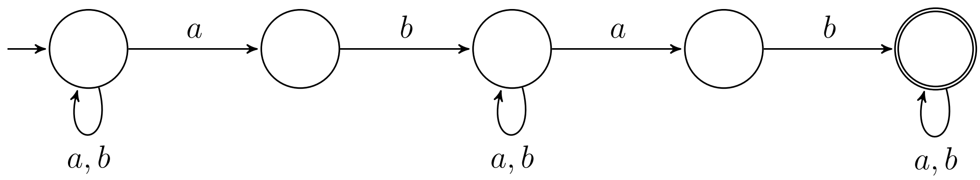
(10) Für jede berechenbare Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt

◯ $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$ ist entscheidbar.
◯ $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$ ist berechenbar.
$\surd$ $f \circ f \circ f$ **ist berechenbar.**

Aufgabe 2. (9 Punkte) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

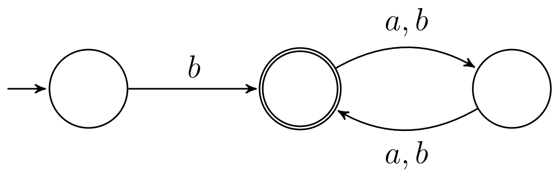
(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens zweimal das Teilwort } ab\}$

Lösung: $(a|b)^*ab(a|b)^*ab(a|b)^*$



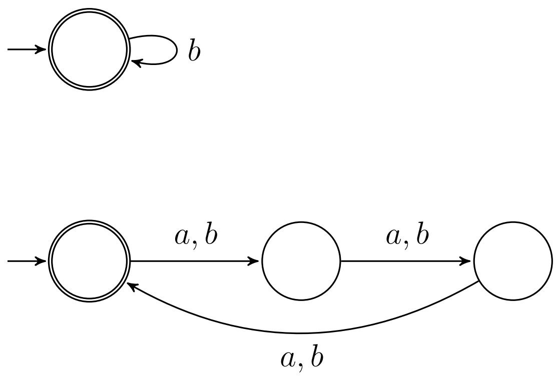
(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } b \text{ und } |w| \text{ ist ungerade}\}$

Lösung: $b((a|b)(a|b))^*$



(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält kein } a \text{ oder } |w| \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

Lösung: $b^*|((a|b)(a|b)(a|b))^*$

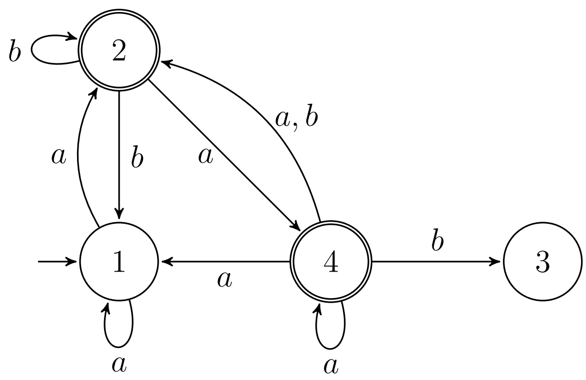


Aufgabe 3. (6 Punkte) Gegeben sei der NFA $M = (\{1,2,3,4\}, \{a,b\}, \delta, \{1\}, \{2,4\})$, wobei δ gegeben ist durch:

δ	a	b
1	$\{1,2\}$	$\emptyset$
2	$\{4\}$	$\{1,2\}$
3	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$\{1,2,4\}$	$\{2,3\}$

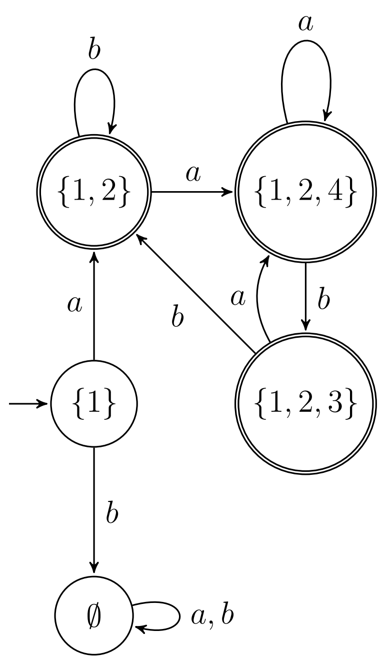
(a) Zeichnen Sie das zu M gehörige Automatendiagramm.

Lösung:

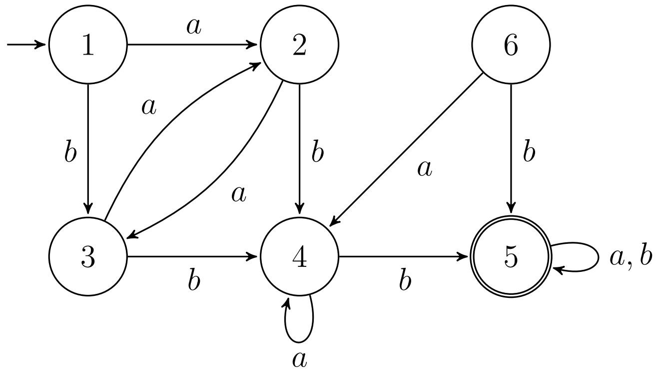


(b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

Lösung:



Aufgabe 4. (6 Punkte) Minimieren Sie den folgenden DFA mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. **Geben Sie an, welche Zustandspaare in welcher Reihenfolge markiert werden, und zeichnen Sie den erhaltenen minimalen DFA**.

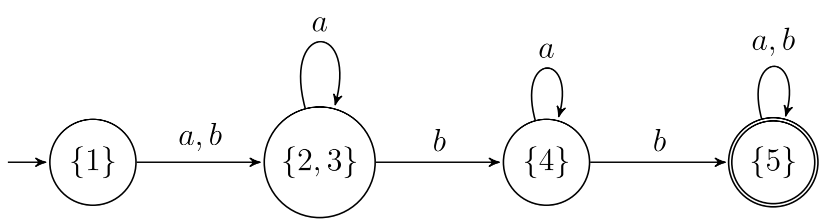


Lösung: Zustand 6 wird entfernt, weil nicht erreichbar.

2	5	-	-	-
3	6		-	-
4	2	3	4	-
5	1	1	1	1
	1	2	3	4

1. Trenne End- und Nichtendzustände.
2. Markiere $(1,4)$ wegen $\delta(1,b) = 3$ und $\delta(4,b) = 5$ und $(3,5)$ markiert.
3. Markiere $(2,4)$ wegen $\delta(2,b) = 4$ und $\delta(4,b) = 5$ und $(4,5)$ markiert.
4. Markiere $(3,4)$ wegen $\delta(3,b) = 4$ und $\delta(4,b) = 5$ und $(4,5)$ markiert.
5. Markiere $(1,2)$ wegen $\delta(1,b) = 3$ und $\delta(2,b) = 4$ und $(3,4)$ markiert.
6. Markiere $(1,3)$ wegen $\delta(1,b) = 3$ und $\delta(3,b) = 4$ und $(3,4)$ markiert.

2 und 3 sind erkennungsäquivalent.



Aufgabe 5. (6 Punkte) Gegeben sei folgende Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ mit

$$L = \{a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N},\, m \text{ gerade}\}.$$

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Lösung: Sei $p \in \mathbb{N}$. Sei $w = a^{2p}ba^{2p}$, also $w \in L$ und $|w| \geq p$. Sei $w = xyz$ eine Zerlegung von w mit $|xy| \leq p$ und $|y| \geq 1$. Also gibt es $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $x = a^k$, $y = a^\ell$ und $z = a^{2p-k-\ell}ba^{2p}$. Mit Pumpfaktor 0 erhalten wir

$$w' := xy^0z = a^k a^{2p-k-\ell} b a^{2p} = a^{2p-\ell} b a^{2p}.$$

Da $\ell \geq 1$, gilt $w' \notin L$, und somit ist L nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

Aufgabe 6. (6 Punkte) Geben Sie einen Kellerautomaten an, der die Sprache

$$L = \{(ab)^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

erkennt.

Lösung: Der Kellerautomat hat Zustände q_0, q_1, q_2 und folgende Transitionen.

- akzeptiere das leere Wort
  - $(q_0, \varepsilon, \#) \to (q_0, \varepsilon)$
- lese $(ab)^n$ und zähle n auf dem Stack
  - $(q_0, a, \#) \to (q_1, \bullet)$
  - $(q_1, b, \bullet) \to (q_0, \bullet)$
  - $(q_0, a, \bullet) \to (q_1, \bullet\bullet)$
  - $(q_1, b, \bullet) \to (q_0, \bullet)$
- und gehe irgendwann zu q_2
  - $(q_1, b, \bullet) \to (q_2, \bullet)$
- lese a^n
  - $(q_2, a, \bullet) \to (q_2, \varepsilon)$

Aufgabe 7. (6 Punkte) Gegeben sei die Grammatik

$$G = (\{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}, \{a, b, c\}, P, S),$$

wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
S &\to AD \mid FG \\
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c \\
D &\to SE \mid BC \\
E &\to BC \\
F &\to AF \mid a \\
G &\to BG \mid CG \mid b \\
H &\to SC
\end{aligned}$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $aabcb$ in $L(G)$ enthalten ist.

Lösung: Der CYK-Algorithmus liefert folgende Tabelle:

Länge	a	a	b	c	b
1	A, F	A, F	B, G	C	B, G
2	F	S	D, E	G	-
3	S	S, H	G	-	-
4	H	S	-	-	-
5	S	-	-	-	-

Also ist $aabcb \in L(G)$.

Aufgabe 8. (6 Punkte) Geben Sie für

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \text{ ist durch drei teilbar}\}$$

eine kontextfreie Grammatik an.

Lösung: $S \to \varepsilon \mid AAAS$, $A \to a \mid b \mid c$

Aufgabe 9. (6 Punkte) Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, , z_3, z_4, z_f\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_f\})$ die deterministische 2-Band-Turingmaschine mit

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, (d, \Box)) &= (z_0, (d, d), (R, R)), && d \in \{a, b\} \\
\delta(z_0, (c, \Box)) &= (z_1, (c, \Box), (N, L)) \\
\delta(z_1, (c, b)) &= (z_2, (c, \Box), (N, L)) \\
\delta(z_2, (c, a)) &= (z_3, (c, \Box), (N, L)) \\
\delta(z_3, (c, d)) &= (z_3, (c, d), (N, L)), && d \in \{a, b\} \\
\delta(z_3, (c, \Box)) &= (z_4, (c, \Box), (R, R)) \\
\delta(z_4, (d, d)) &= (z_4, (d, d), (R, R)), && d \in \{a, b\} \\
\delta(z_4, (\Box, \Box)) &= (z_f, (\Box, \Box), (N, N))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, (i, j)) &= (z_0, (i, j), (N, N)) \\
\delta(z_1, (i, j)) &= (z_1, (i, j), (N, N)) \\
\delta(z_2, (i, j)) &= (z_2, (i, j), (N, N)) \\
\delta(z_3, (i, j)) &= (z_3, (i, j), (N, N)) \\
\delta(z_4, (i, j)) &= (z_4, (i, j), (N, N))
\end{aligned}$$

für alle anderen Tupel (i, j).

(a) Akzeptiert M das Wort $w_1 = cabc$? ◯ ja $\surd$ **nein**

(b) Akzeptiert M das Wort $w_2 = ababcab$? $\surd$ **ja** ◯ nein

(c) Welche Sprache akzeptiert M?

Lösung: $L(M) = \{wabcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Aufgabe 10. (4 Punkte) Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die folgende Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ berechnet:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 2^x, & \text{falls } y \le z, \\ \max(2x, y^2), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung:

$x_4 := 2x_1;$
$x_5 := x_2 \cdot x_2;$
$x_6 := x_4 - x_5;$
IF $x_6 = 0$ THEN $x_4 := x_5$ END;
$x_7 := x_2 - x_3;$
IF $x_7 = 0$ THEN
  $x_4 := 1;$
  LOOP x_1 DO $x_4 := 2 \cdot x_4$ END
END;
$x_1 := x_4$

Aufgabe 11. (3 Punkte) Geben Sie an, welche partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ das folgende WHILE-Programm berechnet (Eingabevariablen sind x_1 und x_2, die Ausgabevariable ist x_1):

$x_3 := x_1;$
$x_1 := 1;$
WHILE $x_3 \neq 0$ DO
  $x_1 := x_1 \cdot x_3;$
  $x_3 := x_3 - 1$
END;
$x_4 := x_2 - 42;$
$x_5 := 13 - x_2;$
IF $x_4 = 0$ THEN
  IF $x_5 = 0$ THEN
    WHILE $x_2 \neq 0$ DO
      $x_1 := x_1 + 1$
    END
  END
END

Lösung:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \text{undefiniert}, & \text{falls } 13 \le x_2 \le 42, \\ x_1! & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 12. (6 Punkte) Geben Sie für die folgenden partiellen Funktionen jeweils ein WHILE-Programm an, das sie berechnet.

(a) $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(a,b) = \begin{cases} b, & \text{falls } 5 < a \leq 42, \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung:

$x_3 := x_1 - 5\,;$
WHILE $x_3 \neq 0$ DO
  $x_4 := x_1 - 42\,;$
  IF $x_4 = 0$ THEN
    $x_1 := x_2$
  END;
  $x_3 := 0$
END

Ergebnis in x_1.

(b) $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \begin{cases} \text{undefiniert}, & \text{wenn } n^2 > 50, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung: Es gilt $n^2 > 50$ genau dann, wenn $n \geq 8$.

$x_2 := x_1 - 7\,;$
WHILE $x_2 \neq 0$ DO
  $x_2 := x_2 + 1\,;$
END ;
$x_1 := 2$

Ergebnis in x_1.

Aufgabe 13. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv sind.

(a) (4 Punkte) $f(x, y) = y! + (y + 1)! + \cdots + (y + x)!$
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $h(y) = y!$ primitiv-rekursiv ist.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ h(y+1) &= h(y) \cdot s(y), \end{aligned}$$

daher ist h primitiv-rekursiv. Für f schreiben wir also

$$\begin{aligned} f(0, y) &= h(y) \\ f(x+1, y) &= f(x, y) + (y + x + 1)! = f(x, y) + h(y + x) \cdot s(y + x). \end{aligned}$$

(b) (2 Punkte) $g(n) = \sum_{k=0}^{n}((k + 1)^2 + 1)^2$

Lösung:

$$\begin{aligned} g(0) &= 4 \\ g(n+1) &= g(n) + ((n + 2)^2 + 1)^2 \\ &= g(n) + (n^2 + 4n + 5)^2 \\ &= g(n) + n^4 + 8n^3 + 26n^2 + 40n + 25 \end{aligned}$$

Aufgabe 14. (4 Punkte) Geben Sie an, welche Funktionen von μf und μg berechnet werden, wobei f und g wie folgt definiert sind.

(a) $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $f(n,x,y) = 5y - n^4 x$

Lösung: $$\mu f(x,y) = \begin{cases} \text{undefiniert,} & \text{falls } y > 0 \text{ und } x = 0 \\ 0, & \text{falls } x = y = 0 \\ \left\lceil \sqrt[4]{\frac{5y}{x}} \right\rceil & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $g(n,x,y) = y + n(x-2)$

Lösung:
$$\mu g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } y = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 15. (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 2n, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Geben Sie eine Turing-Maschine an, die f berechnet.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Eingabezahl n als Binärzahl auf dem Band steht (z.B. kodiert 111 die Eingabezahl 7). Denken Sie außerdem daran, dass der Lesekopf am Ende auf dem ersten Symbol der Ausgabe stehen muss. Machen Sie sich an genügend (nicht zu komplizierten) Beispielen klar, wie die Turing-Maschine arbeiten muss!

Lösung: Sei $M = (\{s, z_1, z_2, z_3, z_4, z_r, f\}, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \delta, s, \Box, \{f\})$ mit

$$\begin{aligned}
\delta(s,a) &= \{(s,a,R) \mid a \in \{0,1\}\} \\
\delta(s,\Box) &= \{(z_1,\Box,L)\} \\
\delta(z_1,0) &= \{(z_2,0,L)\} \\
\delta(z_2,\Box) &= \{(f,\Box,R)\} \\
\delta(z_2,a) &= \{(z_3,a,R) \mid a \in \{0,1\}\} \\
\delta(z_3,0) &= \{(z_3,0,R)\} \\
\delta(z_3,\Box) &= \{(z_r,0,L)\} \\
\delta(z_1,1) &= \{(z_4,0,L)\} \\
\delta(z_4,1) &= \{(z_4,0,L)\} \\
\delta(z_4,0) &= \{(z_r,1,L)\} \\
\delta(z_4,\Box) &= \{(f,1,N)\} \\
\delta(z_r,a) &= \{(z_r,a,L) \mid a \in \{0,1\}\} \\
\delta(z_r,\Box) &= \{(f,\Box,R)\}
\end{aligned}$$

Idee: Der Leseschreibkopf läuft ans rechte Ende von $\mathrm{bin}(n)$ und überprüft, ob das letzte Bit eine 0 oder eine 1 ist.

Bei einer 1 wissen wir, dass die Zahl ungerade ist, also werden von rechts alle 1en bis zur ersten 0 durch eine 0 ersetzt (Übertrag). Danach wird die erste 0 von rechts durch eine 1 ersetzt. Sollte die Binärzahl die Gestalt $11\ldots11$ haben, so lesen wir links das $\Box$, welches wir durch eine 1 ersetzen.

Sollte das letzte Bit hingegen eine 0 gewesen sein, ist n gerade und wir müssen eine Fallunterscheidung machen: Bei $n = 0$ (Zeichen vor dieser 0 ist ein $\Box$) sind wir fertig, bei $n > 0$ hängen wir eine weitere 0 an $\mathrm{bin}(n)$ an, welches der Multiplikation mit 2 entspricht.

In allen Fällen läuft der Leseschreibkopf wieder zum Ausgangspunkt zurück.

Aufgabe 16. (5 Punkte (Bonus))

Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μ-rekursiv ist:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x), & \text{falls } x \text{ Zweierpotenz ist,} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie dürfen hierzu die μ-rekursive Funktion $\text{eq}\colon \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ verwenden mit

$$\text{eq}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Lösung: $\text{pow2}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\text{pow2}(x) = 2^x$ lässt sich einfach über primitve Rekursion und mult definieren. Definiere dann

$$g(n,x) = \text{eq}(\text{pow2}(n), x)$$
$$f(x) = (\mu g)(x)$$