Vorlesung Formale Sprachen und Automaten

Markus Lohrey

Universität Siegen

Sommersemester 2025

Organisatorisches zur Vorlesung

Unter `https://www.eti.uni-siegen.de/ti/lehre/sommer_2025/fsa/` gibt es

- aktuelle Versionen der Folien,
- Übungsblätter,
- aktuelle Informationen, etc.

Literaturempfehlungen:

- Uwe Schöning, Theoretische Informatik – kurz gefasst, Spektrum Akademischer Verlag (5. Auflage): Die Vorlesung folgt inhaltlich sehr eng diesem Buch.
- Lutz Priese, Katrin Erk, Theoretische Informatik: Eine umfassende Einführung. Springer: Ist elektronisch über die Universitätsbibliothek verfügbar.
- Alexander Asteroth, Christel Baier, Theoretische Informatik, Pearson Studium: Dieses Buch ist vom Aufbau etwas anders strukturiert als die Vorlesung, stellt aber dennoch eine sehr gute Ergänzung dar.

Michael Figelius und Rahul Jain organisieren die **Übungen**.

Mengentheoretische Grundlagen (Wiederholung aus DMI)

Naive Definition (Mengen, Elemente, $\in$, $\notin$)

Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten unterschiedlichen Objekten (die Elemente der Menge) zu einem neuen Ganzen.

Wir schreiben $x \in M$, falls das Objekt x zur Menge M gehört.
Wir schreiben $x \notin M$, falls das Objekt x nicht zur Menge M gehört.

Eine Menge, welche nur aus endlich vielen Objekten besteht (eine endliche Menge), kann durch explizite Auflistung dieser Elemente spezifiziert werden.

Beispiel: $M = \{2, 3, 5, 7\}$.

Hierbei spielt die Reihnfolge der Auflistung keine Rolle:
$\{2, 3, 5, 7\} = \{7, 5, 3, 2\}$.

Auch Mehrfachauflistungen spielen keine Rolle:
$\{2, 3, 5, 7\} = \{2, 2, 2, 3, 3, 5, 7\}$.

Mengentheoretische Grundlagen (Wiederholung aus DMI)

Eine besonders wichtige Menge ist die leere Menge $\emptyset = \{\}$, die keinerlei Elemente enthält.

In der Mathematik hat man es häufig auch mit unendlichen Mengen zu tun (Mengen, die aus unendlich vielen Objekten bestehen).

Solche Mengen können durch Angabe einer Eigenschaft, welche die Elemente der Menge auszeichnet, spezifiziert werden.

Beispiele:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (Menge der ganzen Zahlen)
- $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2, n \text{ ist nur durch 1 und } n \text{ teilbar}\}$ (Menge der Primzahlen)

Mengentheoretische Grundlagen (Wiederholung aus DMI)

Definition ($\subseteq$, Potenzmenge, $\cap$, $\cup$, $\setminus$, disjunkt)

Seien A und B zwei Mengen.

- $A \subseteq B$ bedeutet, dass jedes Element von A auch zu B gehört (A ist eine Teilmenge von B); formal:

$$\forall a : a \in A \rightarrow a \in B$$

- $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$ (Potenzmenge von A)
- $A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ und } c \in B\}$ (Schnitt von A und B)
- $A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ oder } c \in B\}$ (Vereinigung von A und B)
- $A \setminus B = \{c \in A \mid c \notin B\}$ (Differenz von A und B)
- Zwei Mengen A und B sind disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Mengentheoretische Grundlagen (Wiederholung aus DMI)

Definition (beliebige Vereinigung und Schnitt)

Sei I eine Menge und für jedes $i \in I$ sei A_i wiederum eine Menge. Dann definieren wir:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid \exists j \in I : a \in A_j\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a \mid \forall j \in I : a \in A_j\}$$

Beispiele:

$$\bigcup_{a \in A} \{a\} = A \text{ für jede Menge } A$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \emptyset$$

Mengentheoretische Grundlagen

Definition (Kartesisches Produkt)

Für zwei Mengen A und B ist

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

das kartesische Produkt von A und B (Menge aller Paare aus einem Element von A und einem Element von B).

Allgemeiner: Für Mengen $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ sei

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\ &= \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \text{ gilt } a_i \in A_i\} \end{aligned}$$

Falls $A_1 = A_2 = \cdots A_n = A$ schreiben wir auch A^n für diese Menge.

Mengentheoretische Grundlagen (Wiederholung aus DMI)

Beispiele und einige einfache Aussagen:

- $\{1,2,3\} \times \{4,5\} = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$
- Für alle Mengen A, B, und C gilt:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Vollständige Induktion (Wiederholung aus DMI)

Um eine Aussage $P(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, genügt es, folgendes zu zeigen:

1. $P(0)$ gilt (Induktionsanfang).
2. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n+1)$ (Induktionsschritt).

Dieses Beweisprinzip nennt man das Prinzip der vollständigen Induktion.

Beispiel: Wir beweisen mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vollständige Induktion (Wiederholung aus DMI)

Induktionsanfang: Es gilt $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$.

Induktionsschritt: Angenommen es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann gilt auch

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= (\sum_{i=1}^{n} i) + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Vollständige Induktion (Wiederholung aus DMI)

Für Induktionsanfang (Induktionsschritt) schreiben wir häufig kurz **IA** (**IS**).

Mittels des Prinzips der Induktion kann man auch Objekte definieren.

Angenommen, wir wollen für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Objekt A_n definieren.

Dies kann man wie folgt machen:

1. Definiere A_0.
2. Gib eine allgemeine Vorschrift an, wie das Objekt A_{n+1} aus den (bereits konstruierten) Objekten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ konstruiert werden kann.

Wörter: intuitiv

Den Inhalt von Folie 13–45 finden Sie im Buch von Schöning auf Seite 3–18.

Eine zentrale Datenstruktur in der Informatik sind endliche Symbolfolgen, auch bekannt als Wörter oder Strings.

Beispiele:

1. Ein Byte ist eine Folge von 8 Bits, z.B. 00110101
2. Ein deutscher oder englischer Text ist eine Folge bestehend aus den Symbolen $a, b, c, \ldots, z, A, B, C, \ldots, Z, 1, 2, \ldots, 9$, _ (blank) und den Interpunktionszeichen . , ! , ? sowie ,
3. Ein Gen ist eine Folge der Symbole A, G, T, C (4 DNA-Basen)

Wörter: formal

Definition (Alphabet, Wörter)

Ein Alphabet ist eine endliche nicht-leere Menge.

Ein Wort über dem Alphabet Σ ist eine endliche Zeichenkette der Form $a_1 a_2 \cdots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$ für $1 \leq i \leq n$. Die Länge dieses Worts ist n.

Für ein Wort w schreiben wir auch $|w|$ für die Länges des Wortes w.

Für $n = 0$ erhalten wir das leere Wort (das Wort der Länge 0), welches mit ε bezeichnet wird.

Mit Σ^* bezeichnen wir die Menge aller Wörter über dem Alphabet Σ.

Die Menge aller nicht-leeren Wörter ist $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Wörter

Beispiel 1: Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Dann sind mögliche Wörter aus Σ^*:

$$\varepsilon, a, b, aa, ab, bc, bbbab, \ldots$$

Für die Längen gilt $|\varepsilon| = 0$, $|a| = |b| = 1$, $|aa| = |ab| = |bc| = 2$, and $|bbbab| = 5$.

Beispiel 2: Ein Genom ist ein Wort über dem Alphabet $\{A, G, T, C\}$.

Bemerkung: Häufig wird gefragt, wozu man das leere Wort ε braucht.

Das leere Wort wird sich in vielen Betrachtungen als nützlich erweisen. Man kann das leere Wort ε mit der Zahl $0 \in \mathbb{N}$ vergleichen. In der Tat hat es ähnliche Eigenschaften wie die Zahl 0.

Wörter

Konventionen: Wörter aus Σ^* werden mit Kleinbuchstaben (aus der hinteren Hälfte des Alphabets) bezeichnet: u, v, w, x, y, z, ...

Definition (Konkatenation von Wörtern)

Für Wörter $u = a_1 \cdots a_m$ und $v = b_1 \cdots b_n$ mit $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \Sigma$ ist das Wort

$$u \circ v = a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n.$$

die Konkatenation (oder Hintereinanderschreibung) der Wörter u und v.

Anstatt $u \circ v$ schreiben wir meistens nur uv.

Wörter

Offensichtlich gilt für alle Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$:

- $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ oder kurz $(uv)w = u(vw)$ (Assoziativgesetz)
- $\varepsilon \circ u = u = u \circ \varepsilon$

Wir schreiben für $(uv)w = u(vw)$ auch einfach uvw.

Erinnerung aus DMI: $(\Sigma^*, \circ)$ ist also ein Monoid, man nennt es auch das von Σ erzeugte freie Monoid. Das leere Wort ε ist das neutrale Element.

Beachte: Für Wörter u und v gilt im Allgemeinen $uv \neq vu$.

Es gilt z.B. $ab \neq ba$ für $a, b \in \Sigma$ mit $a \neq b$.

Konkatenation von Wörtern ist nicht kommutativ.

Wörter

Angenommen Σ ist ein Alphabet mit n Symbolen: $|\Sigma| = n$.

Dann gibt es genau n^k viele Wörter der Länge k über dem Alphabet Σ:

$$|\{w \in \Sigma^* \mid |w| = k\}| = n^k.$$

Begründung: Für das erste Symbol in einem Wort gibt es genau n Möglichkeiten, für das zweite Symbol gibt es ebenfalls n Möglichkeiten, u.s.w. Insgesamt gibt es also

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k \text{ viele}} = n^k$$

Möglichkeiten.

Für die Menge $\{w \in \Sigma^* \mid |w| = k\}$ (Menge aller Wörter der Länge k) schreiben wir auch Σ^k.

Sprachen

Im Kontext von natürlichen Sprachen (z.B. Deutsch oder Englisch) kann man eine Sprache als die Menge aller Wörter über dem Alphabet aus Beispiel 2, Folie 13, definieren, die einen korrekten Satz ergeben.

Z.B. wäre die Zeichenkette *Der_Hund_jagt_die_Katze.* ein Element der Sprache Deutsch.

Definition (Sprache)

Sei Σ ein Alphabet. Eine (formale) Sprache L über dem Alphabet Σ ist eine beliebige Teilmenge von Σ^*, d.h. $L \subseteq \Sigma^*$.

Beispiel: Sei $\Sigma = \{(,), +, -, *, /, a\}$. Dann können wir die Sprache EXPR der korrekt geklammerten Ausdrücke definieren. Es gilt beispielsweise:

- $(a - a) * a + a/(a + a) - a \in$ EXPR
- $(((a))) \in$ EXPR
- $((a+) - a(\notin$ EXPR

Grammatiken (Einführung)

Grammatiken in der Informatik sind – ähnlich wie Grammatiken für natürliche Sprachen – ein Mittel, um alle syntaktisch korrekten Sätze (hier: Wörter) einer Sprache zu erzeugen.

Beispiel: Grammatik zur Erzeugung von Elementen aus EXPR:

$$
\begin{aligned}
E &\to a \\
E &\to E + E \\
E &\to E - E \\
E &\to E * E \\
E &\to E/E \\
E &\to (E)
\end{aligned}
$$

Grammatiken (Einführung)

Mit Hilfe dieser (endlichen) Grammatik ist es möglich, Elemente aus EXPR abzuleiten.

Beispiel:

$$E \to E * E \to (E) * E \to (E + E) * E \to (a + a) * a$$

Offensichtlich kann man mit der Grammatik unendlich viele Wörter erzeugen.

Das heißt, die zu der Grammatik gehörende Sprache (man sagt auch: die von der Grammatik erzeugte Sprache) ist unendlich.

Grammatiken (Definition)

Grammatiken besitzen Produktionen der Form

$$\textit{linke Seite} \rightarrow \textit{rechte Seite}$$

Sowohl auf der linken, als auch auf der rechten Seite können zwei Typen von Symbolen vorkommen:

- Nicht-Terminale (die Variablen, aus denen noch weitere Wortbestandteile abgeleitet werden sollen)
- Terminale (die "eigentlichen" Symbole)

Im vorherigen Beispiel: auf der linken Seite befindet sich immer genau ein Nicht-Terminal; man spricht von einer kontextfreien Grammatik.

Es gibt aber auch allgemeinere Grammatiken.
Es gibt sogar Grammatiken, die auf Bäumen und Graphen statt auf Wörtern arbeiten. Diese werden in der Vorlesung jedoch nicht behandelt.

Grammatiken (Definition)

Definition (Grammatik, Satzform)

Eine Grammatik G ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, das folgende Bedingungen erfüllt:

- V ist ein Alphabet (Menge der Nicht-Terminalen oder Variablen).
- Σ ist ein Alphabet (Menge der Terminal(symbol)e) mit $V \cap \Sigma = \emptyset$, d.h., kein Zeichen ist gleichzeitig Terminal und Nicht-Terminal.
- $P \subseteq ((V \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^*) \times (V \cup \Sigma)^*$ ist eine endliche Menge von Produktionen (Produktionen).
- $S \in V$ ist die Startvariable (Axiom).

Ein Wort aus $(V \cup \Sigma)^*$ nennt man auch eine Satzform.

Grammatiken (Definition)

Eine Produktion aus P ist also ein Paar (ℓ, r) von Wörtern über $V \cup \Sigma$, das zumeist als $\ell \to r$ geschrieben wird. Dabei gilt:

- Sowohl ℓ als auch r bestehen aus Variablen und Terminalsymbolen.
- ℓ darf nicht nur aus Terminalen bestehen. Eine Regel muss also immer zumindest ein Nicht-Terminal ersetzen.

Konventionen:

- Variablen (Elemente aus V) werden mit Großbuchstaben bezeichnet: A, B, C, ..., S, T, ...
- Terminalsymbole (Elemente aus Σ) werden mit Kleinbuchstaben dargestellt: a, b, c, ...

Grammatiken (Beispiel)

Beispiel-Grammatik

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab,$
  $bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Grammatiken (Ableitungen)

Wie werden die Produktionen eingesetzt, um Wörter aus der Startvariablen S zu erzeugen?

Definition (Ableitungsschritt)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik und seien $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$. Es gilt:

$$u \Rightarrow_G v \ (u \text{ geht unter } G \text{ unmittelbar über in } v),$$

falls eine Produktion $(\ell \to r) \in P$ und Wörter $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$ existieren mit

$$u = x\ell y \qquad v = xry.$$

Man kann $\Rightarrow_G$ als binäre Relation auf $(V \cup \Sigma)^*$, d.h. als Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ auffassen:

$$\Rightarrow_G = \{(u, v) \mid \exists(\ell \to r) \in P \ \exists x, y \in (V \cup \Sigma)^* : u = x\ell y, v = xry\}$$

Grammatiken (Ableitungen)

Statt $u \Rightarrow_G v$ schreibt man auch $u \Rightarrow v$, wenn klar ist, um welche Grammatik es sich handelt.

Definition (Ableitung)

Eine Folge von Wörtern $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n$ mit $w_0 = S$ und
$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n$

heißt Ableitung von w_n (aus S). Dabei darf w_n sowohl Terminale als auch Variablen enthalten, ist also eine Satzform.

Hier ist eine Ableitung von $aabbcc$ aus S mittels der Grammatik G von Folie 25:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aaBBCC \Rightarrow aabBCC$$
$$\Rightarrow aabbCC \Rightarrow aabbcC \Rightarrow aabbcc$$

Grammatiken und Sprachen

Definition (die von einer Grammatik erzeugte Sprache)

Die von einer Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ erzeugte (dargestellte, definierte) Sprache ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}.$$

Dabei ist $\Rightarrow_G^*$ die reflexive und transitive Hülle von $\Rightarrow_G$, d.h. $u \Rightarrow_G^* v$ genau dann, wenn $n \geq 0$ und Satzformen $u_0, u_1, \ldots u_n \in (V \cup \Sigma)^*$ existieren mit: $u_0 = u$, $u_n = v$ und $u_i \Rightarrow_G u_{i+1}$ für alle $0 \leq i \leq n-1$.

In anderen Worten: Die von G erzeugte Sprache $L(G)$ besteht genau aus den Satzformen, die in beliebig vielen Schritten aus S abgeleitet werden können und nur aus Terminalen bestehen.

Grammatiken und Sprachen

Die vorherige Beispielgrammatik G (Folie 25) erzeugt die Sprache

$$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}.$$

Dabei ist $a^n = \underbrace{a \ldots a}_{n\text{-mal}}$.

Die Behauptung, dass G wirklich diese Sprache erzeugt, ist nicht offensichtlich.

Grammatiken und Sprachen

Bemerkung: Ableiten ist kein deterministischer, sondern ein nichtdeterministischer Prozess. Für ein $u \in (V \cup \Sigma)^*$ kann es entweder gar kein, ein oder mehrere v geben mit $u \Rightarrow_G v$.

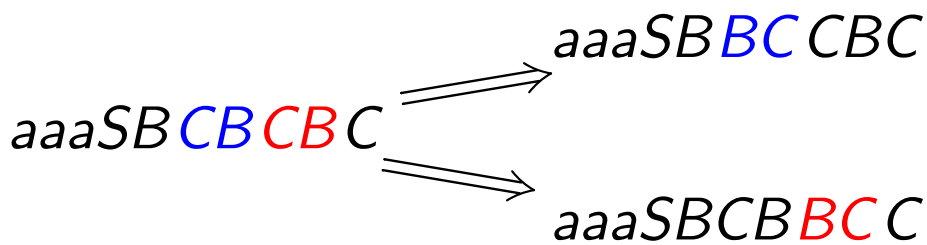
In anderen Worten: $\Rightarrow_G$ ist keine Funktion.

Dieser Nichtdeterminismus kann durch zwei verschiedene Effekte verursacht werden ...

Grammatiken und Sprachen

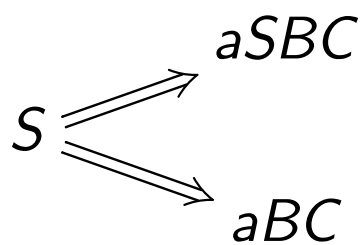
- Eine Regel ist an zwei verschiedenen Stellen anwendbar.

  Beispiel-Grammatik:



- Zwei verschiedene Produktionen sind anwendbar (entweder an der gleichen Stelle – wie unten abgebildet – oder an verschiedenen Stellen):

  Beispiel-Grammatik:



Grammatiken und Sprachen

Weitere Bemerkungen:

- Es kann beliebig lange Ableitungen geben, die nie zu einem Wort aus Terminalsymbolen führen:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow \ldots$$

- Manchmal können Ableitungen in einer Sackgasse enden, d.h., obwohl noch Variablen in einer Satzform vorkommen, ist keine Regel mehr anwendbar.

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabcBC \not\Rightarrow$$

Chomsky-Hierarchie

Typ 0 – Chomsky-0

Jede Grammatik ist vom Typ 0 (keine Einschränkung der Produktionen).

Typ 1 – Chomsky-1

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist vom Typ 1 (oder monoton, kontextsensitiv), falls $|\ell| \leq |r|$ für alle Produktionen $(\ell \to r) \in P$ gilt.

Typ 2 – Chomsky-2

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist vom Typ 2 (oder kontextfrei), falls sie (i) vom Typ 1 ist und (ii) zusätzlich $\ell \in V$ für jede Produktion $(\ell \to r) \in P$ gilt.
Insbesondere muss $|r| \geq |\ell| = 1$ gelten.

Chomsky-Hierarchie

Typ 3 – Chomsky-3

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist vom Typ 3 (oder regulär), falls sie (i) vom Typ 2 ist und (ii) zusätzlich für alle Produktionen $(A \to r) \in P$ gilt: $r \in \Sigma$ oder $r = aB$ mit $a \in \Sigma, B \in V$.
D.h., die rechten Seiten von Produktionen sind entweder einzelne Terminale oder ein Terminal gefolgt von einer Variablen.

Typ-i-Sprache

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt vom Typ i ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$), falls es eine Typ-i-Grammatik G gibt mit $L(G) = L$.

Solche Sprachen nennt man dann auch semi-entscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar (Typ 0), kontextsensitiv (Typ 1), kontextfrei (Typ 2) oder regulär (Typ 3).

Chomsky-Hierarchie

Bemerkungen:

- Woher kommt der Name "kontextsensitiv"?

  Bei kontextfreien Grammatiken gibt es nur Produktionen der Form $A \to x$, wobei $A \in V$ und $x \in (\Sigma \cup V)^*$. Das bedeutet: A kann – unabhängig vom Kontext – durch x ersetzt werden.

  Bei den mächtigeren kontextsensitiven Grammatiken sind dagegen Produktionen der Form $uAv \to uxv$ möglich, mit der Bedeutung: A kann nur in bestimmten Kontexten durch x ersetzt werden.

Chomsky-Hierarchie

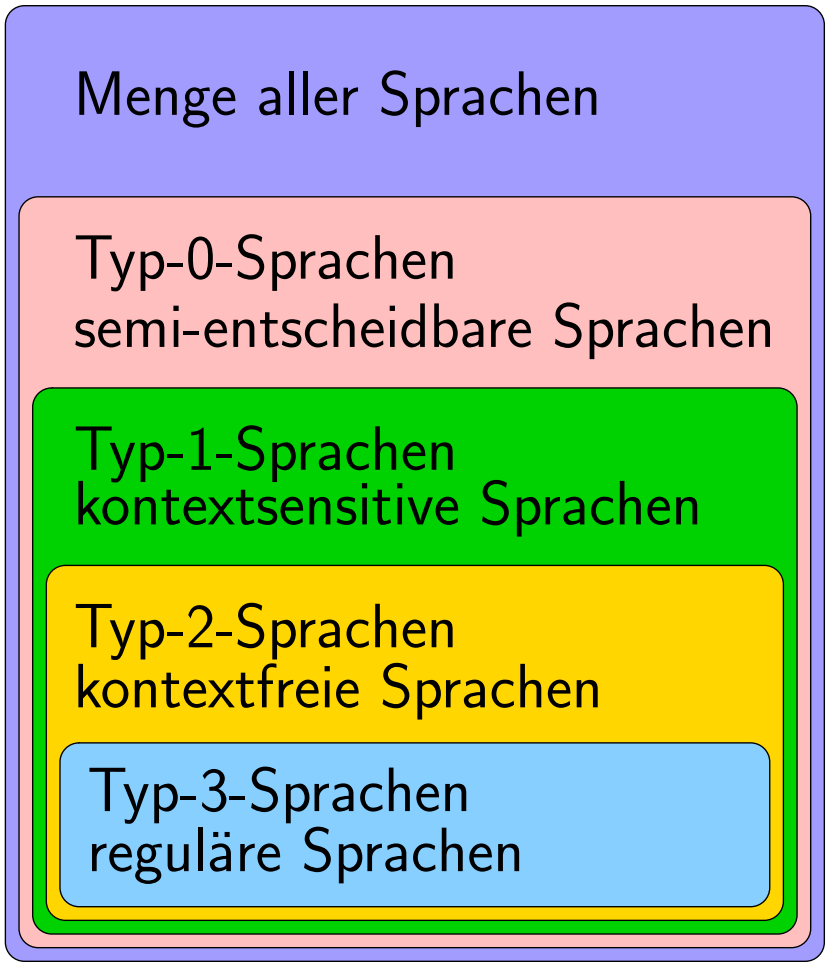
- ε-Sonderregelung: Bei Typ-1-Grammatiken (und damit auch bei regulären und kontextfreien Grammatiken) sind Produktionen der Form $\ell \to \varepsilon$ zunächst nicht zugelassen, wegen $|\ell| > 0$ und $|\ell| \leq |r|$ für alle $(\ell \to r) \in P$. Das bedeutet aber: das leere Wort ε kann nicht abgeleitet werden!

  Wir modifizieren daher die Grammatik-Definition für Typ-1 (und Typ-2, Typ-3) Grammatiken leicht und erlauben $S \to \varepsilon$, falls S das Startsymbol ist und auf keiner rechten Seite vorkommt.

Chomsky-Hierarchie

Jede Typ-i-Grammatik ist eine Typ-$(i-1)$-Grammatik (für $i \in \{1, 2, 3\}$) $\rightsquigarrow$ die entsprechenden Mengen von Sprachen sind ineinander enthalten.

Außerdem: die Inklusionen sind echt, d.h., es gibt für jedes i eine Typ-$(i-1)$-Sprache, die keine Typ-i-Sprache ist (z. B. eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist). Das werden wir später zeigen.



Wortproblem

Definition (Wortproblem)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik (von beliebigem Typ). Das Wortproblem für $L(G)$ ist das folgende Entscheidungsproblem:
EINGABE: Ein Wort $w \in \Sigma^*$.
FRAGE: Gilt $w \in L(G)$?

Satz (Entscheidbarkeit des Wortproblems für Typ 1)

Es gibt einen Algorithmus, der als Eingabe eine Typ-1-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ bekommt, und nach endlicher Zeit "Ja" (bzw. "Nein") ausgibt, falls $w \in L(G)$ (bzw. $w \notin L(G)$) gilt.

Man sagt auch: Das Wortproblem ist entscheidbar für Typ-1-Sprachen (eine genauere Definition kommt später in der Vorlesung).

Wortproblem

Beweis:

Falls $w = \varepsilon$ gilt, müssen wir nur überprüfen, ob $S \to \varepsilon$ eine Produktion ist.

Wenn ja, gilt $w \in L(G)$, sonst gilt $w \notin L(G)$.

Sei nun $w \neq \varepsilon$ und sei $n = |w| \geq 1$.

Wir definieren einen gerichteten endlichen Graphen $\mathcal{G}$ wie folgt:

- Die Menge der Knoten von $\mathcal{G}$ ist die Menge

$$K := \{u \in (V \cup \Sigma)^+ \mid |u| \leq n\}$$

  aller Satzformen der Länge höchstens n.

- Für $u, v \in K$ gibt es eine Kante $u \to v$, falls $u \Rightarrow_G v$ gilt.

Beachte: $|K| = \sum_{i=1}^{n} (|V| + |\Sigma|)^i$.

Wortproblem

Da G eine Typ-1-Grammatik ist gilt: $w \in L(G)$ genau dann, wenn es in dem Graphen $\mathcal{G}$ einen Pfad vom Knoten $S \in K$ zum Knoten $w \in K$ gibt.

Begründung: Leitet man mit einer Typ-1-Grammatik ein Wort der Länge $n \geq 1$ aus dem Startsymbol ab, so kommt in der Ableitung keine Satzform der Länge $> n$ vor (dies gilt bei einer Typ-0-Grammatik im Allgemeinen nicht).

Man konstruiert nun den Graphen $\mathcal{G}$ indem man alle Knoten aus K in einer for-Schleife durchläuft und für jeden Knoten $u \in K$ die Menge $\{v \mid u \Rightarrow_G v\}$ aller direkten Nachfolgerknoten von u generiert.

Mittels Tiefensuche (Vorlesung *Algorithmen & Datenstrukturen*) kann man nun testen, ob es im Graphen $\mathcal{G}$ einen Pfad von S nach w gibt. □

Wortproblem

Bemerkung: Dieser Algorithmus ist nicht sehr effizient, da die Größe des konstruierten Graphens exponentiell mit der Länge des Eingabewortes w steigt (man spricht von einem Exponentialzeitalgorithmus).

Man vermutet, dass dies aber auch nicht vermeidbar ist:

Das Wortproblem für Typ-1-Grammatiken ist ein sogenanntes PSPACE-vollständiges Problem, siehe Vorlesung *Komplexitätstheorie I*.

Für PSPACE-vollständige Probleme kennt man keine Algorithmen mit einer polynomiellen Laufzeit.

Syntaxbäume und Eindeutigkeit

Wir betrachten folgende Beispiel-Grammatik (eine Typ-2-Grammatik) zur Erzeugung von korrekt geklammerten arithmetischen Ausdrücken:

$$G = (\{E, T, F\}, \{(,), a, +, *\}, P, E)$$

mit folgender Produktionenmenge P (in abkürzender Backus-Naur-Form):

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T \mid E + T \\ T &\rightarrow F \mid T * F \\ F &\rightarrow a \mid (E) \end{aligned}$$

In der Backus-Naur-Form für Typ-2-Grammatiken schreibt man mehrere Produktionen

$$A \rightarrow w_1, A \rightarrow w_2, \ldots, A \rightarrow w_k \tag{1}$$

in der Form

$$A \rightarrow w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_k.$$

Dies ist nur eine Abkürzung für (1).

Syntaxbäume und Eindeutigkeit

Für die meisten Wörter der von G erzeugten Sprache gibt es mehrere mögliche Ableitungen:

$$E \Rightarrow T \Rightarrow T * F \Rightarrow F * F \Rightarrow a * F \Rightarrow a * (E)$$
$$\Rightarrow a * (E + T) \Rightarrow a * (T + T) \Rightarrow a * (F + T)$$
$$\Rightarrow a * (a + T) \Rightarrow a * (a + F) \Rightarrow a * (a + a)$$

$$E \Rightarrow T \Rightarrow T * F \Rightarrow T * (E) \Rightarrow T * (E + T)$$
$$\Rightarrow T * (E + F) \Rightarrow T * (E + a) \Rightarrow T * (T + a)$$
$$\Rightarrow T * (F + a) \Rightarrow T * (a + a) \Rightarrow F * (a + a) \Rightarrow a * (a + a)$$

Die erste Ableitung ist eine sogenannte Linksableitung (in jedem Schritt wird das am weitesten links stehende Nicht-Terminal ersetzt), die zweite eine Rechtsableitung (in jedem Schritt wird das am weitesten rechts stehende Nicht-Terminal ersetzt).

Syntaxbäume und Eindeutigkeit

Wir bilden nun aus beiden Ableitungen den Syntaxbaum, indem wir

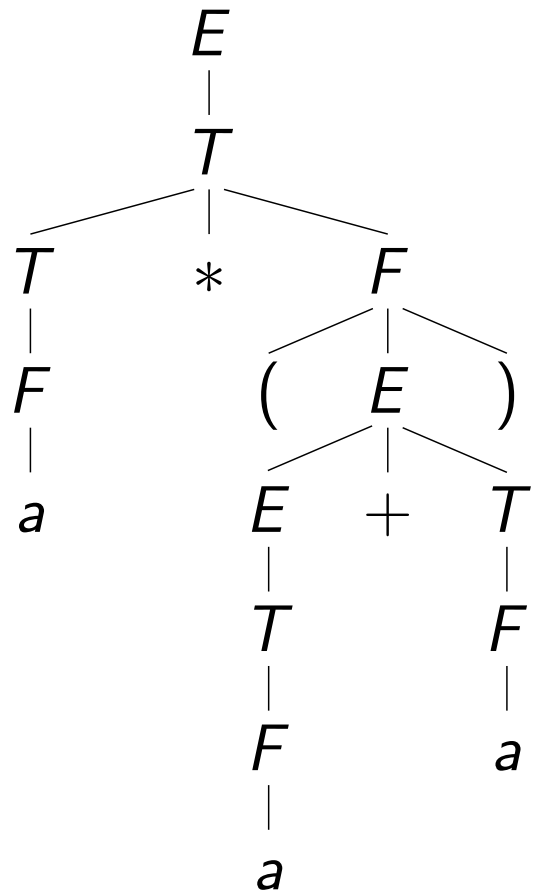
- Die Wurzel des Baums mit der Startvariablen der Grammatik beschriften.
- Bei jeder Anwendung einer Produktion $A \to z$ zu A genau $|z|$ Kinder hinzufügen, die mit den Zeichen von z beschriftet sind.

Syntaxbäume lassen sich für alle Ableitungen von kontextfreien Grammatiken aufbauen.

Syntaxbäume und Eindeutigkeit

Dabei erhalten wir in beiden Fällen den gleichen Syntaxbaum.

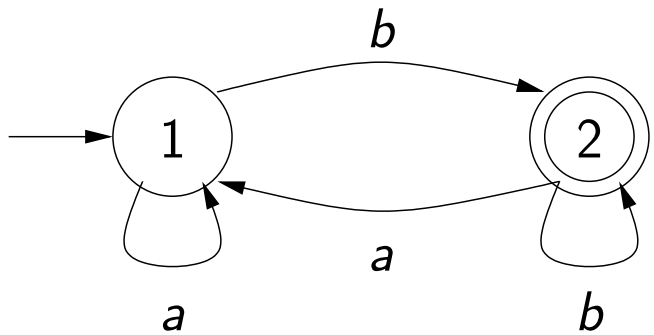
Man sagt, eine Grammatik ist eindeutig, wenn es für jedes Wort in der erzeugten Sprache genau einen Syntaxbaum gibt
$\Longleftrightarrow$ es gibt für jedes Wort genau eine Linksableitung
$\Longleftrightarrow$ es gibt für jedes Wort genau eine Rechtsableitung.



Endliche Automaten

Den Inhalt der Folien 44–88 finden Sie im Buch von Schöning auf Seite 19–27.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit regulären Sprachen, aber zunächst unter einem anderen Blickwinkel. Statt Typ-3-Grammatiken betrachten wir zustandsbasierte Automatenmodelle, die man auch als "Spracherzeuger" bzw. "Sprachakzeptierer" betrachten kann.



Deterministische endliche Automaten

Definition (Deterministischer endlicher Automat)

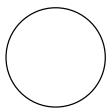
Ein (deterministischer) endlicher Automat M ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$, wobei:

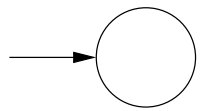
- Z eine endliche Menge von Zuständen ist,
- Σ das endliche Eingabealphabet (mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$) ist,
- $z_0 \in Z$ der Startzustand ist,
- $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände ist und
- $\delta\colon Z \times \Sigma \to Z$ die Überführungsfunktion (oder Übergangsfunktion) ist.

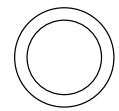
Abkürzung: DFA (deterministic finite automaton)

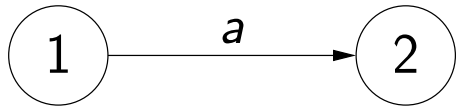
Deterministische endliche Automaten

Graphische Notation:

Zustand: 

Startzustand: 

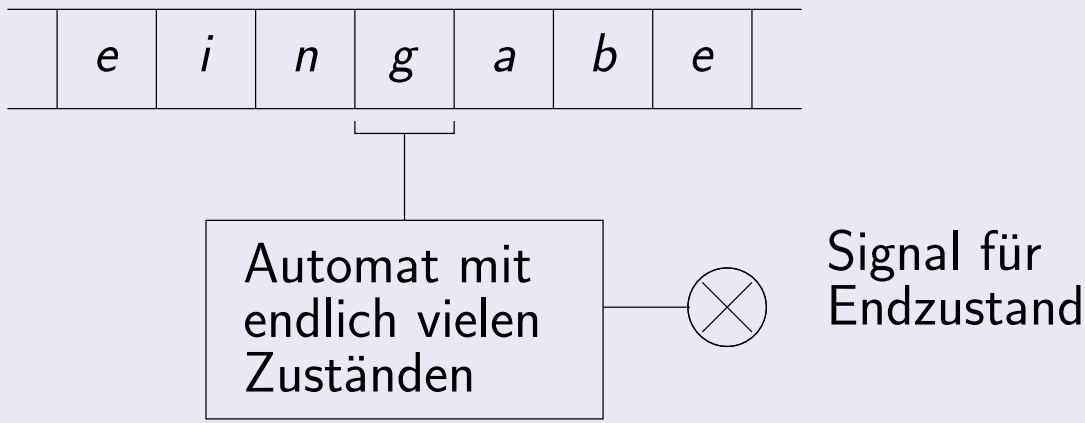
Endzustand: 

Übergang $\delta(1, a) = 2$: 

Deterministische endliche Automaten

Woher kommt der Name “endlicher Automat”?

Vorstellung von einer Maschine, die sich in endlich vielen Zuständen befinden kann, die eine Eingabe liest und die signalisiert, sobald die Eingabe akzeptiert ist.



Deterministische endliche Automaten

Analogie Fahrkartenautomat:

Ein Fahrkartenautomat kann sich in folgenden Zuständen befinden:

- Keine Eingabe
- Fahrtziel ausgewählt
- Geld eingegeben
- Fahrkarte wurde ausgegeben

Das ist natürlich nur die halbe Wahrheit, da ein Fahrkartenautomat mitzählen muss, wieviel Geld bereits eingeworfen wurde. Eine Modellierung mit nur endlich vielen Zuständen ist daher stark vereinfacht.

Deterministische endliche Automaten

Von einem zugegebenerweise sehr abstrakten Standpunkt aus, ist jeder reale Rechner auch ein DFA:

- Die Menge der Zustände ist die Menge aller möglichen Speicherbelegungen.

  Wenn der gesamte Speicher des Rechners aus n Bits besteht, dann gibt es 2^n mögliche Speicherbelegungen (eine Speicherbelegung kann man sich auch als ein Wort aus $\{0,1\}^n$ vorstellen).

  Beispiel: Ein Rechner mit 8 GB Hautpspeicher und 512 GB Festplattenspeicher kann ingesamt $8 \cdot 520 \cdot 1000^3 = 4160000000000$ Bits speichern und entspricht damit einem DFA mit $2^{4160000000000}$ Zuständen!

- Der Anfangszustand ist die Speicherbelegung im Werkszustand.

Deterministische endliche Automaten

- Die Überführungsfunktion ergibt sich aus dem Verhalten des Rechners bei Eingaben.

  Angenommen ihr Rechner bekommt Eingaben nur über die Tastatur.

  Dann besteht das Eingabealphabet aus den Tasten des Rechners.

  Befindet sich der Rechner in einem bestimmten Speicherzustand und wird eine bestimmte Taste gedrückt (Eingabe), dann geht der Rechner in einen neuen Zustand über.

- Endzustände machen bei einem realen Rechner weniger Sinn, da ein Computer eher selten zum akzeptieren von Wörtern eingesetzt wird.

Obige Sichtweise ist für die Praxis natürlich viel zu abstrakt und auch völlig inpraktikabel, wie man an den $2^{4160000000000}$ Zuständen sieht, wird aber dennoch bei kleineren Hardwarekomponenten im Bereich der sogenannten Hardwareverifikation (siehe Mastervorlesung *Model-Checking* von Prof. Lochau) eingesetzt.

Deterministische endliche Automaten

Die bisherige Übergangsfunktion δ eines DFA liest nur ein Zeichen auf einmal ein. Wir verallgemeinern sie daher zu einer Übergangsfunktion $\widehat{\delta}$, die die Übergänge für ganze Wörter ermittelt.

Definition (Mehr-Schritt-Übergänge eines DFA)

Zu einem gegebenen DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ definieren wir eine Funktion $\widehat{\delta}\colon Z \times \Sigma^* \to Z$ induktiv wie folgt, wobei $z \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(z, \varepsilon) &= z \\ \widehat{\delta}(z, ax) &= \widehat{\delta}(\delta(z, a), x) \end{aligned}$$

Intuition: $\widehat{\delta}(z, a_1 a_2 \cdots a_n)$ ist der Zustand, den man vom Zustand z aus erreicht, indem man erst der mit a_1 beschrifteten Kante folgt, dann der mit a_2 beschrifteten Kante folgt, u.s.w.:

$$z \xrightarrow{a_1} z_1 \xrightarrow{a_2} z_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_n} z_n = \widehat{\delta}(z, a_1 a_2 \cdots a_n).$$

Deterministische endliche Automaten

Die folgende einfache Aussage verwenden wir häufig implizit:

Lemma 1

Für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$ und jeden Zustand $z \in Z$ gilt:

$$\widehat{\delta}(z, uv) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(z, u), v).$$

Definition (von einem DFA akzeptierte Sprache)

Die von einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ akzeptierte Sprache ist

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(z_0, x) \in E\}.$$

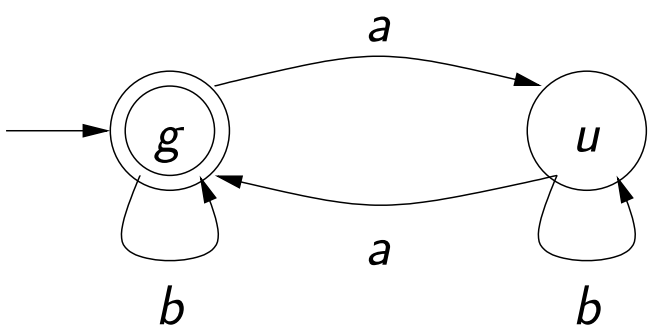
In anderen Worten: Die Sprache $T(M)$ erhälten man, indem man allen Pfaden vom Anfangszustand zu einem Endzustand folgt und dabei alle Zeichen auf den Übergängen aufsammelt.

Deterministische endliche Automaten

Beispiel 1: Wir suchen einen DFA, der folgende Sprache L akzeptiert:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ gerade}\}.$$

Dabei ist $\#_a(w)$ die Anzahl der a's in w.

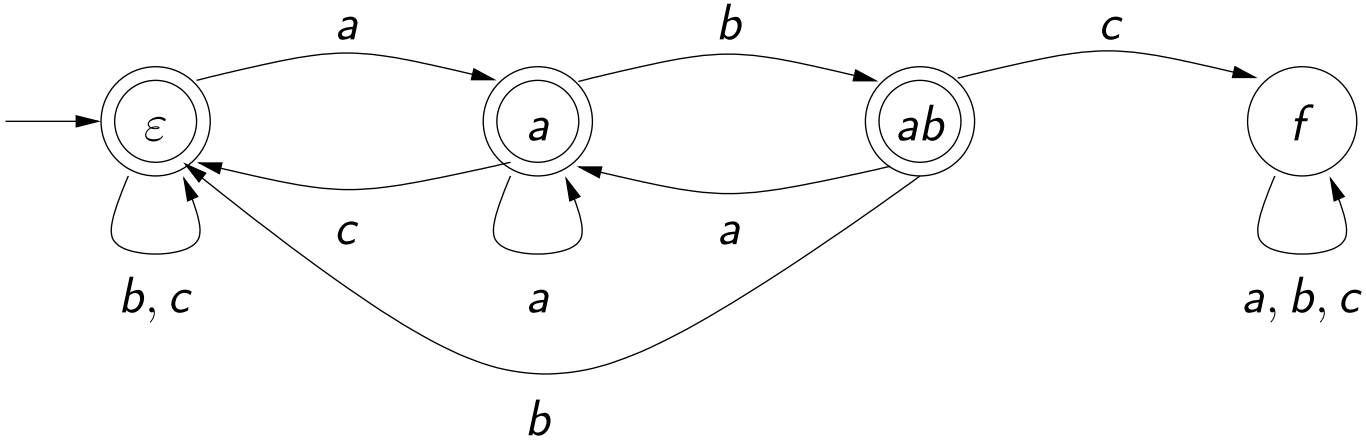


Bedeutung der Zustände:
g – gerade Anzahl a's
u – ungerade Anzahl a's

Deterministische endliche Automaten

Beispiel 2: Wir suchen einen DFA M mit

$$T(M) = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{das Teilwort } abc \text{ kommt in } w \text{ nicht vor}\}.$$



Bedeutung der Zustände:

- ε: kein Präfix von abc gelesen
- a: letztes gelesenes Zeichen war ein a
- ab: zuletzt ab gelesen
- f abc kam im bereits gelesenen Wort vor
  (Fangzustannd, Fehlerzustand)

Deterministische endliche Automaten

Satz (DFAs $\rightarrow$ reguläre Grammatik)

Jede von einem DFA akzeptierte Sprache ist regulär.

Bemerkung: Es gilt auch die umgekehrte Aussage: jede reguläre Sprache kann von einem DFA akzeptiert werden (dazu später mehr.)

Deterministische endliche Automaten

Beweis:

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.

Zunächst modifizieren wir M so, dass in den Anfangszustand keine Kanten hineinführen, d.h.

$$\delta(z, a) \neq z_0$$

für alle $z \in Z$ und $a \in \Sigma$.

Idee: Wir führen eine Kopie z_0' des Anfangszustands z_0 zum DFA hinzu, der die gleichen ausgehenden Kanten wie z_0 hat. Dann leiten wir alle Kanten, die zum Zustand z_0 führen, nach z_0' um.

Formal: Sei $z_0' \notin Z$ ein neuer Zustand und $Z' = Z \cup \{z_0'\}$.

Deterministische endliche Automaten

Sei $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0, E')$, wobei gilt:

$$\delta'(z,a) = \begin{cases} \delta(z,a) & \text{falls } z \in Z \text{ und } \delta(z,a) \neq z_0 \\ z_0' & \text{falls } z \in Z \text{ und } \delta(z,a) = z_0 \end{cases}$$

$$\delta'(z_0',a) = \begin{cases} \delta(z_0,a) & \text{falls } \delta(z_0,a) \neq z_0 \\ z_0' & \text{falls } \delta(z_0,a) = z_0 \end{cases}$$

$$E' = \begin{cases} E & \text{falls } z_0 \notin E \\ E \cup \{z_0'\} & \text{falls } z_0 \in E \end{cases}$$

Dann gilt:

- $\delta'(z,a) \neq z_0$ für alle $z \in Z'$ und $a \in \Sigma$ und
- $T(M') = T(M)$.

Deterministische endliche Automaten

Wir schreiben nun wieder Z, δ, E für Z', δ', E'.

Wir definieren nun eine Typ-3 Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = T(M)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} V &= Z \\ S &= z_0 \\ P &= \{z \to a\ \delta(z,a) \mid z \in Z, a \in \Sigma\} \cup \\ &\quad \{z \to a \mid z \in Z, a \in \Sigma, \delta(z,a) \in E\} \cup \\ &\quad \{z_0 \to \varepsilon\} \text{ falls } z_0 \in E \end{aligned}$$

Beachte: ε-Sonderregelung ist erfüllt.

Behauptung 1: Für alle $z, z' \in Z$ und $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$z \Rightarrow_G^* wz' \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\delta}(z,w) = z'.$$

Deterministische endliche Automaten

Behauptung 1 zeigt man durch Induktion über $|w|$.

Induktionsanfang: $|w| = 0$, d.h. $w = \varepsilon$. Es gilt

$$z \Rightarrow_G^* z' \;\Leftrightarrow\; z = z' \;\Leftrightarrow\; \widehat{\delta}(z, \varepsilon) = z'$$

Induktionsschritt: Sei nun $|w| = n + 1$.

Wir können dann w schreiben als $w = av$ mit $|v| = n$ und $a \in \Sigma$.

Induktionshypothese: Behauptung 1 gilt für v.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
z \Rightarrow_G^* avz' \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists z'' \in Z : (z \to az'') \in P \text{ und } z'' \Rightarrow_G^* vz' \\
&\Longleftrightarrow \quad \delta(z, a) \Rightarrow_G^* vz' \\
&\overset{\text{Ind.hyp.}}{\Longleftrightarrow} \quad \widehat{\delta}(\delta(z, a), v) = z' \\
&\Longleftrightarrow \quad \widehat{\delta}(z, av) = z'
\end{aligned}$$

Deterministische endliche Automaten

Behauptung 2: Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L(G) \iff w \in T(M)$.

1. Fall $w = \varepsilon$.

Es gilt:

$$\varepsilon \in L(G) \iff (z_0 \to \varepsilon) \in P \iff z_0 \in E \iff \varepsilon \in T(M)$$

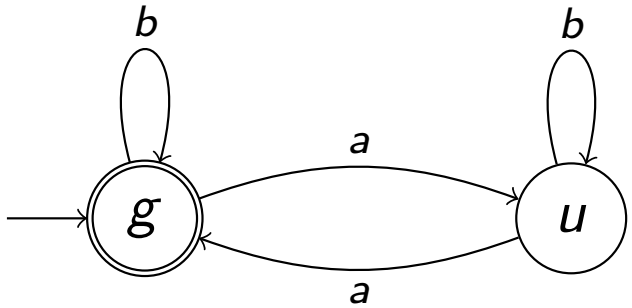
2. Fall: $w \neq \varepsilon$.

Sei $w = va$ mit $a \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$. Es gilt:

$$\begin{aligned} va \in L(G) &\iff \exists z \in Z : z_0 \Rightarrow_G^* vz, (z \to a) \in P \\ &\overset{\text{Beh. 1}}{\iff} \exists z \in Z : \widehat{\delta}(z_0, v) = z, \widehat{\delta}(z, a) \in E \\ &\iff \widehat{\delta}(z_0, va) \in E \\ &\iff va \in T(M) \end{aligned}$$

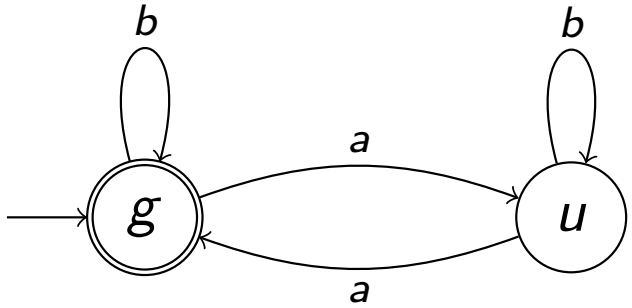
Deterministische endliche Automaten

Beispiel: Nimm den DFA von Folie 54:

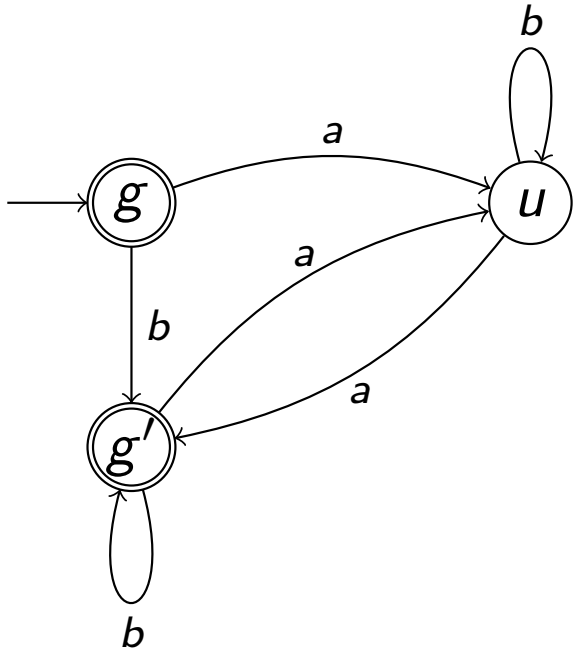


Deterministische endliche Automaten

Beispiel: Nimm den DFA von Folie 54:



Die Konstruktion von Folie 57–58 liefert folgenden DFA:



Deterministische endliche Automaten

Beispiel (Fortsetzung): Die Konstruktion von Folie 59 liefert die Typ-3 Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit:

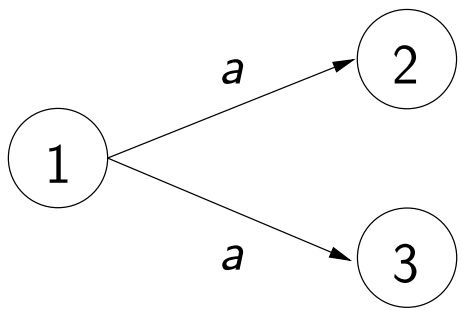
- $V = \{g, u, g'\}$,
- $S = g$,
- P besteht aus folgenden Produktionen:

$$
\begin{array}{lll}
g \to \varepsilon & u \to a & g' \to b \\
g \to b & u \to bu & g' \to au \\
g \to au & u \to ag' & g' \to bg' \\
g \to bg' & &
\end{array}
$$

Nichtdeterministische endliche Automaten

Im Gegensatz zu Grammatiken gibt es bei DFAs keine nichtdeterministischen Effekte. Das heißt, sobald das nächste Zeichen eingelesen wurde, ist klar, welcher Zustand der Folgezustand ist.

Aber: In vielen Fällen ist es natürlicher, wenn man auch nichtdeterministische Übergänge zuläßt. Das führt auch oft zu kleineren Automaten.



Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition (Nichtdeterministischer endlicher Automat)

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat M ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei:

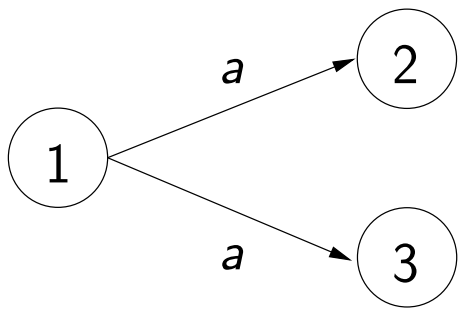
- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das endliche Eingabealphabet (mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$),
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände,
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände und
- $\delta\colon Z \times \Sigma \to 2^Z$ ist die Überführungsfunktion (oder Übergangsfunktion).

Abkürzung: NFA (nondeterministic finite automaton)

Nichtdeterministische endliche Automaten

Zur Erinnerung: $2^Z = \{A \mid A \subseteq Z\}$ ist die Potenzmenge von Z.

Beispiel: $\delta(1, a) = \{2, 3\}$



Nichtdeterministische endliche Automaten

Die Übergangsfunktion δ kann wieder zu einer Mehr-Schritt-Übergangsfunktion erweitert werden:

Definition (Mehr-Schritt-Übergänge eines NFA)

Zu einem gegebenen NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ definieren wir eine Funktion

$$\widehat{\delta}\colon 2^Z \times \Sigma^* \to 2^Z$$

induktiv wie folgt, wobei $Y \subseteq Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(Y, \varepsilon) &= Y \\ \widehat{\delta}(Y, ax) &= \widehat{\delta}\Big(\bigcup_{z \in Y} \delta(z, a),\ x\Big) \end{aligned}$$

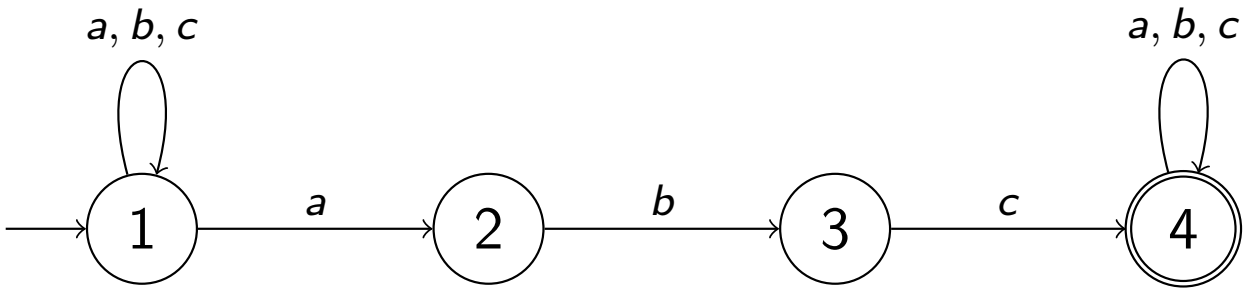
Nichtdeterministische endliche Automaten

Beachte: Die Menge

$$\bigcup_{z \in Y} \delta(z, a) = \{z' \in Z \mid \exists z \in Y : z' \in \delta(z, a)\}$$

enthält alle von einem Zustand aus Y mittels a erreichbaren Zustände.

Beispiel: Für den NFA



gilt $\widehat{\delta}(\{1\}, abca) = \{1, 2, 4\}$ und $\widehat{\delta}(\{2, 3\}, abca) = \emptyset$.

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition (von einem NFA akzeptierte Sprache)

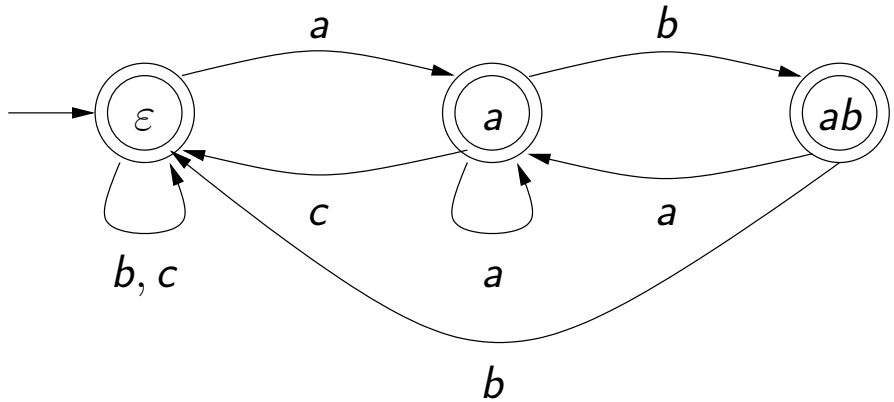
Die von einem NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ akzeptierte Sprache ist

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(S, x) \cap E \neq \emptyset\}.$$

In anderen Worten: ein Wort x wird akzeptiert, genau dann wenn es einen Pfad von einem Anfangszustand zu einem Endzustand gibt, dessen Übergänge mit den Zeichen von x markiert sind (es könnte auch mehrere solche Pfade geben).

Nichtdeterministische endliche Automaten

Beispiel 1: bei nicht-deterministischen Automaten darf auch $\delta(z, a) = \emptyset$ für ein $a \in \Sigma$ gelten, das heißt, es muss nicht für jedes Alphabetsymbol immer einen Übergang geben und der Fangzustand kann weggelassen werden.

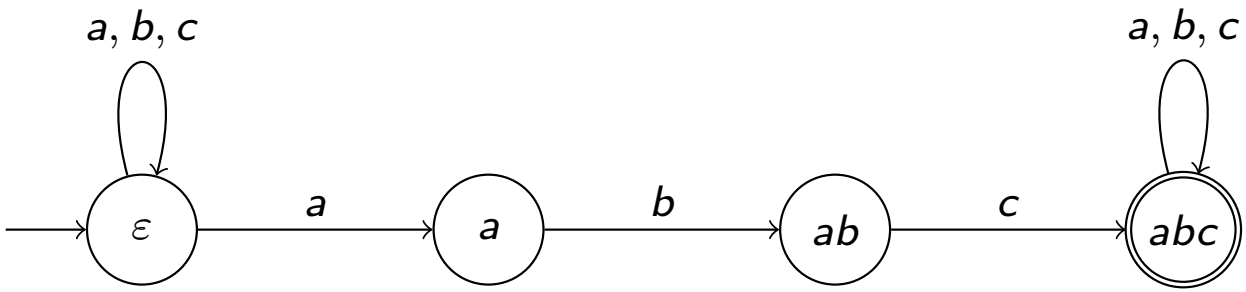


Nichtdeterministische endliche Automaten

Beispiel 2: gesucht ist ein NFA, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{das Teilwort } abc \text{ kommt in } w \text{ vor}\}$$

akzeptiert.



Dieser Automat entscheidet zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht-deterministisch, dass jetzt das Teilwort *abc* beginnt.

Nichtdeterministische endliche Automaten

Bemerkung: Reale Rechner sind immer deterministisch: der nächste Zustand ist eindeutig durch den aktuellen Zustand und die Eingabe festgelegt.

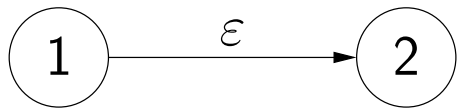
Warum braucht man dann überhaupt Nichtdeterminismus?

- NFAs erlauben in vielen Fällen eine kleinere Repräsentation von regulären Sprachen als DFAs. Ein konkretes Beispiel kommt auf Folie 80–82.
- NFAs können Systeme, über die wir kein vollständiges Wissen haben, modellieren.
- Nichtdeterministische Systeme entstehen häufig durch Abstraktion realer (deterministischer) Systeme.
- Nichtdeterminismus spielt auch in der Komplexitätstheorie eine wichtige Rolle (z.B. $\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP}$), siehe Vorlesung *Komplexitätstheorie I*.

Nichtdeterministische endliche Automaten

Es gibt auch nichtdeterministische Automaten mit sogenannten ε-Kanten (spontante Übergänge, bei denen kein Alphabetsymbol eingelesen wird). Diese werden jedoch in der Vorlesung im allgemeinen nicht benutzt.

Beispiel für eine ε-Kante:

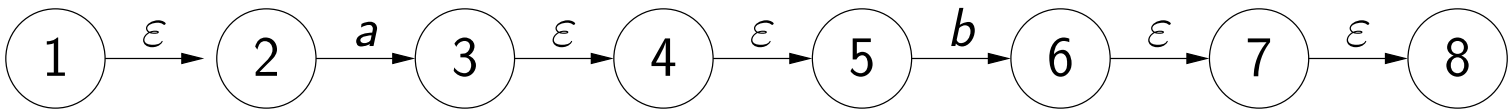


Neue Übergangsfunktion: $\delta\colon Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Z$

Im obigen Beispiel: $\delta(1, \varepsilon) = \{2\}$.

Nichtdeterministische endliche Automaten

Neue Mehr-Schritt-Übergangsfunktion: $\widehat{\delta}\colon 2^Z \times \Sigma^* \to 2^Z$. Dabei dürfen zwischen dem Einlesen der Zeichen beliebig viele ε-Übergänge gemacht werden.



$$\widehat{\delta}(\{1\}, ab) = \{6, 7, 8\}$$

Äquivalenz von NFAs mit und ohne ε-Übergänge

Jeder NFA mit ε-Übergängen kann in einen NFA ohne ε-Übergänge umgewandelt werden, ohne die akzeptierte Sprache zu ändern und ohne die Anzahl der Zustände zu erhöhen.

(Ohne Beweis.)

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Satz (NFAs $\rightarrow$ DFAs; Rabin, Scott)

Jede von einem NFA akzeptierbare Sprache kann auch von einem DFA akzeptiert werden.

Beweis:

Idee: Wir lassen mehrere "Kopien" des NFAs parallel auf dem Eingabewort laufen. Jede diese Kopien befindet sich in einem Zustand des NFAs.

Das heißt, die Zustände dieses DFAs sind Mengen von Zuständen des ursprünglichen NFA. Man nennt diese Konstruktion daher auch Potenzmengenkonstruktion.

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA.

Definiere den DFA

$$M' = (2^Z, \Sigma, \gamma, S, F)$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma(Y, a) &= \bigcup_{z \in Y} \delta(z, a) \text{ für } Y \subseteq Z, a \in \Sigma \\ F &= \{Y \subseteq Z \mid Y \cap E \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Intuition: $\gamma(Y, a)$ ist die Menge aller Zustände $z' \in Z$ die von einem Zustand aus Y durch eine a-Kante erreicht werden können.

Durch Induktion über die Länge des Wortes $w \in \Sigma^*$ zeigen wir für alle $Y \subseteq Z$:

$$\widehat{\gamma}(Y, w) = \widehat{\delta}(Y, w)$$

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Induktionsanfang: $\widehat{\gamma}(Y, \varepsilon) = Y = \widehat{\delta}(Y, \varepsilon)$

Induktionsschritt: Sei $w = ax$ mit $a \in \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}(Y, ax) &= \widehat{\gamma}(\gamma(Y, a), x) \\
&\overset{\text{Ind.hyp.}}{=} \widehat{\delta}(\gamma(Y, a), x) \\
&= \widehat{\delta}\left(\bigcup_{z \in Y} \delta(z, a), x\right) \\
&= \widehat{\delta}(Y, ax)
\end{aligned}$$

Also gilt für jedes Wort $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}
w \in T(M') &\iff \widehat{\gamma}(S, w) \in F \\
&\iff \widehat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \\
&\iff w \in T(M)
\end{aligned}$$

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Bemerkung:

- Die Potenzmengenkonstruktion macht aus einem NFA mit n Zuständen einen äquivalenten DFA mit 2^n Zuständen.
- In vielen Fällen werden diese 2^n Zustände aber nicht alle benötigt.
- Es ist daher angeraten, bei der Potenzmengenkonstruktion nur die Teilmengen von Z, die auch wirklich benötigt werden, in dem DFA aufzunehmen.

Auf der nächsten Folie konstruieren wir auf diese Weise schrittweise für den NFA von Folie 71 einen äquivalenten DFA.

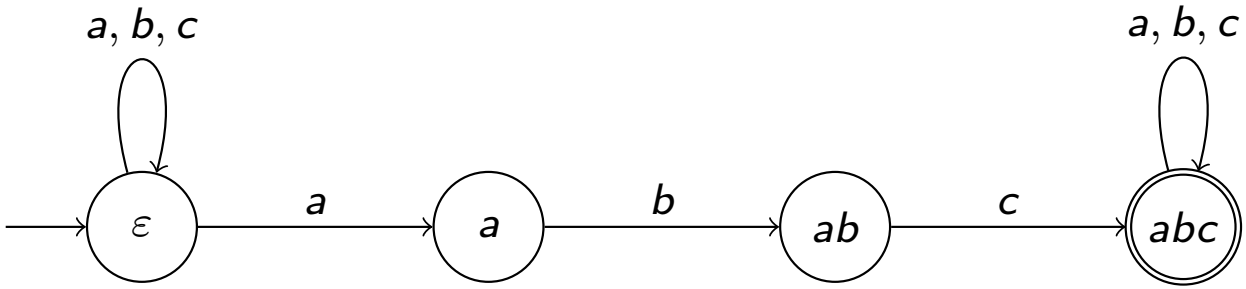
Nur 6 der $2^4 = 16$ möglichen Teilmengen werden benötigt.

Der Knoten 

steht z.B. für die Teilmenge $\{\varepsilon, ab, abc\}$.

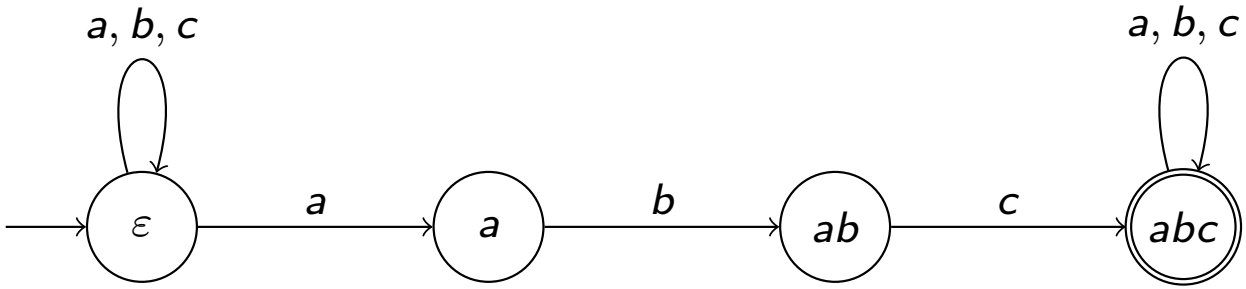
NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

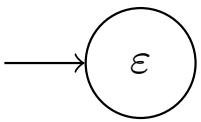
Beispiel 1:



NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

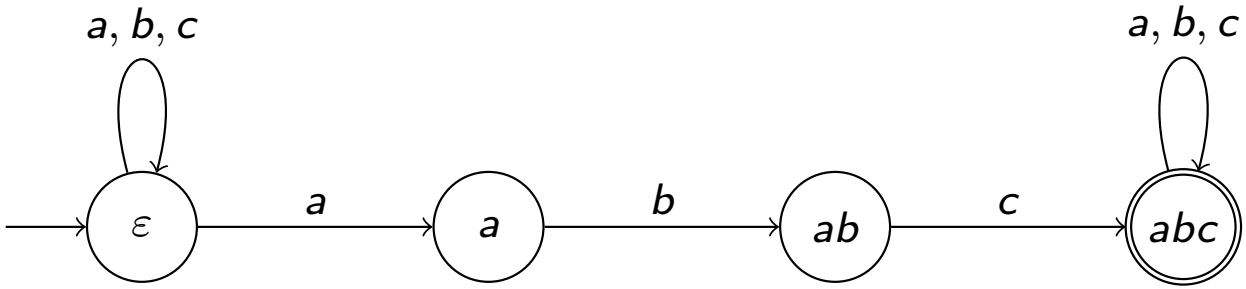
Beispiel 1:

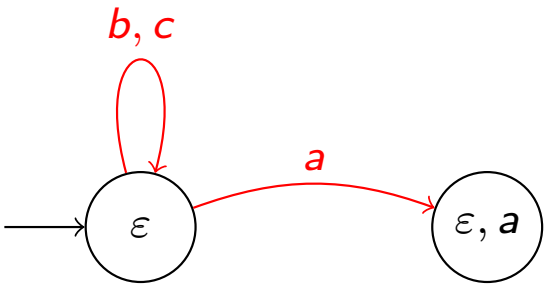




NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

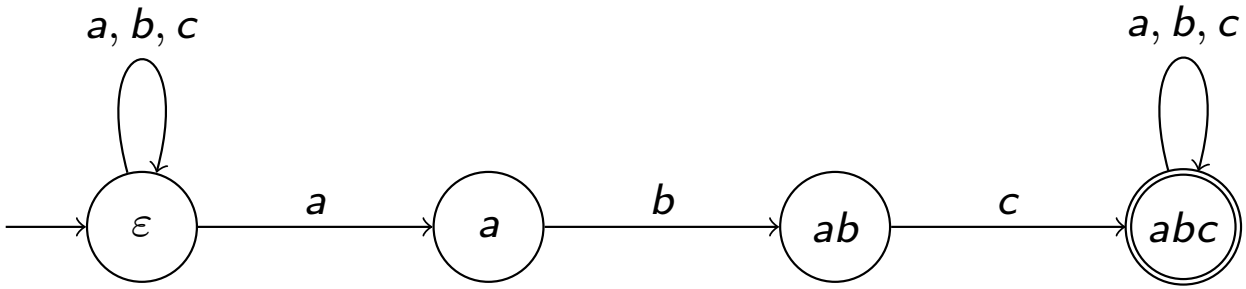
Beispiel 1:

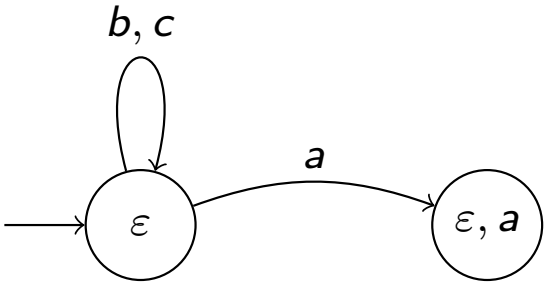




NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

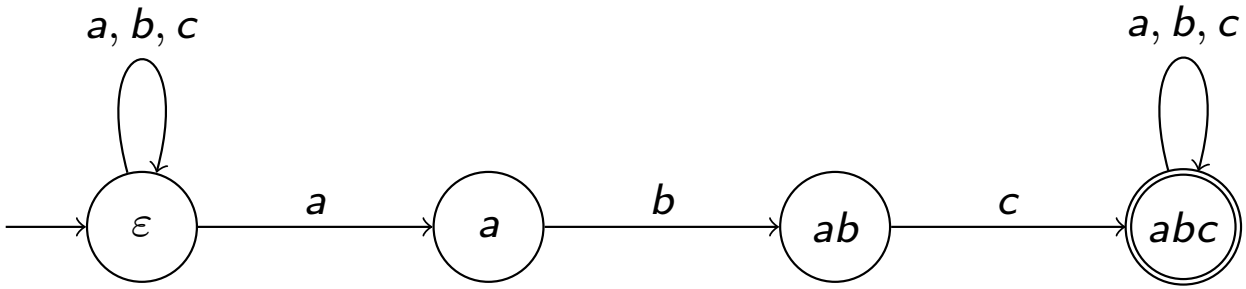
Beispiel 1:

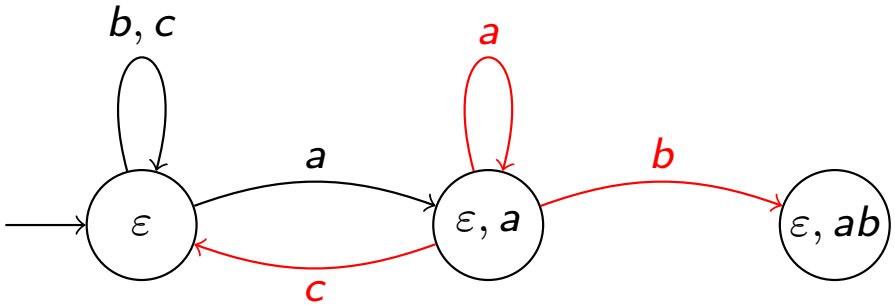




NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

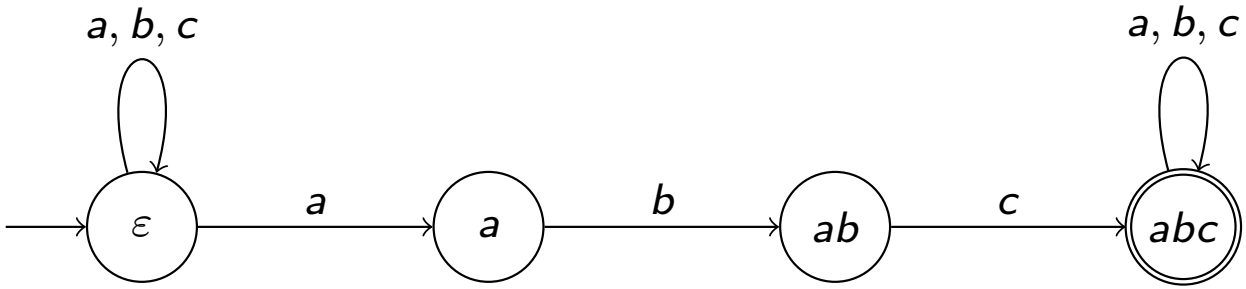
Beispiel 1:

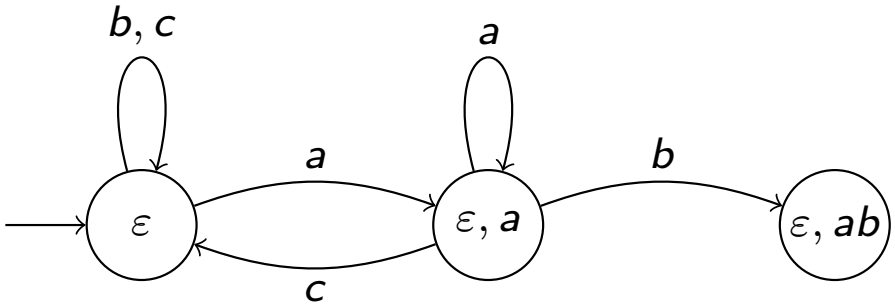




NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

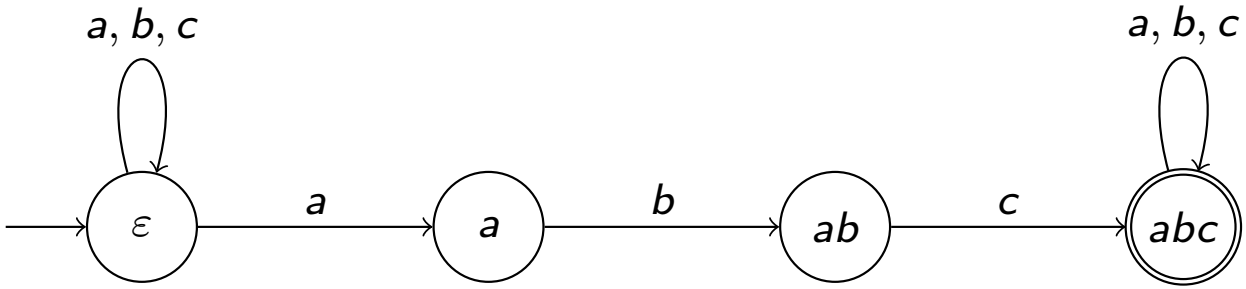
Beispiel 1:

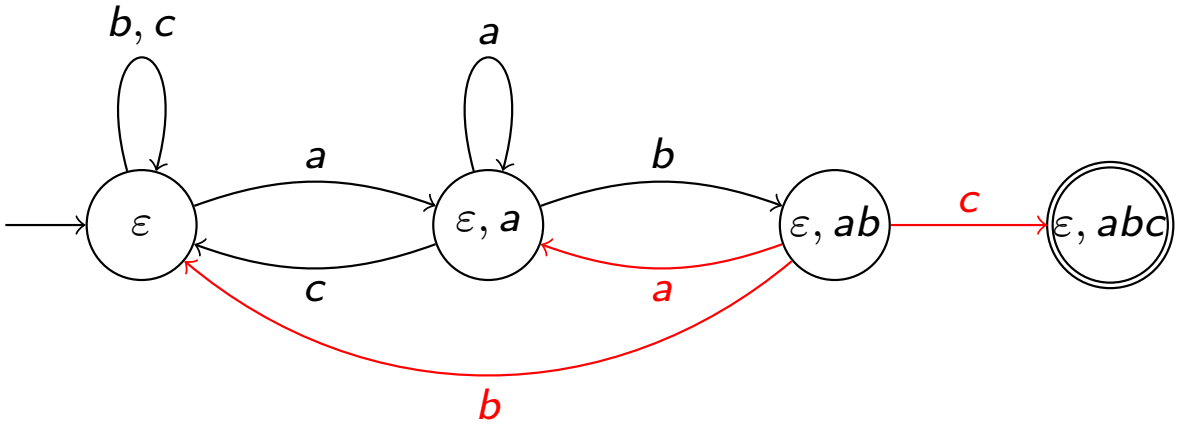




NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

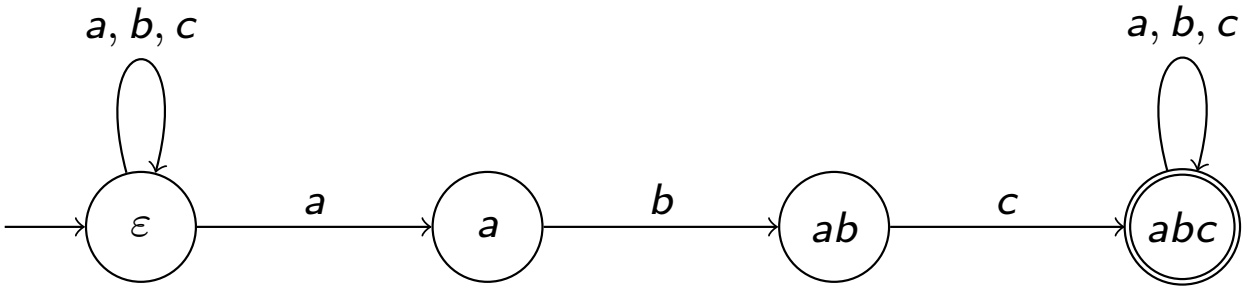
Beispiel 1:

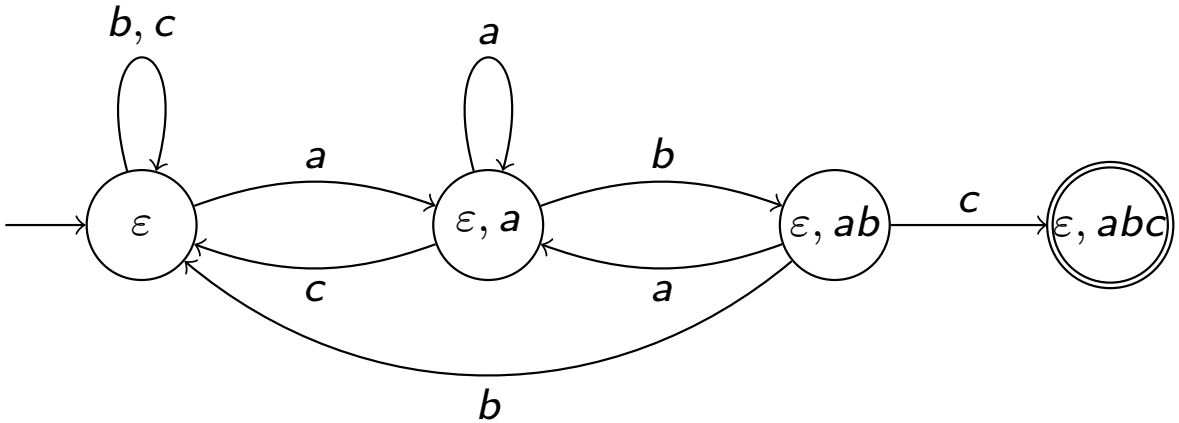




NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

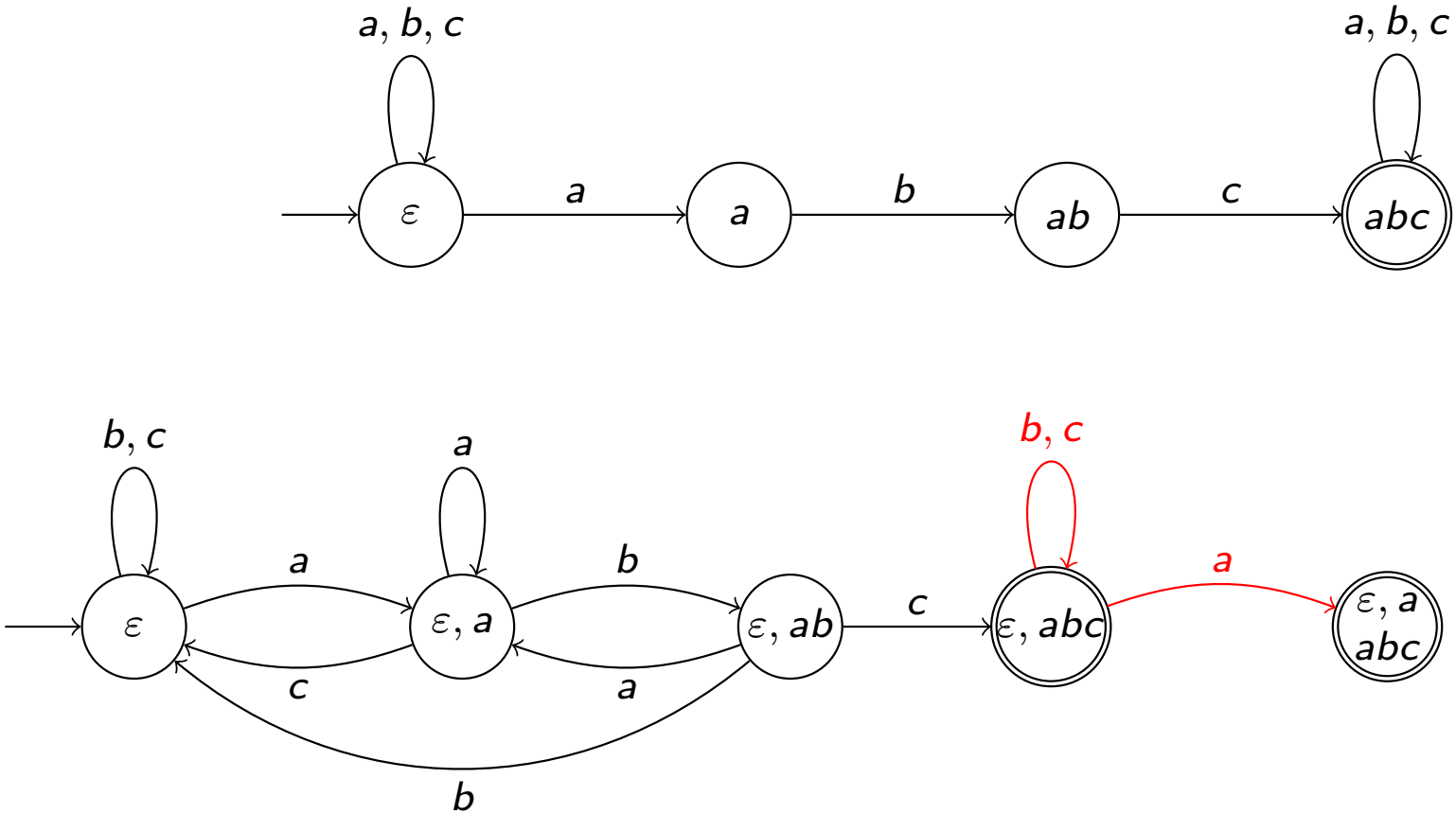
Beispiel 1:





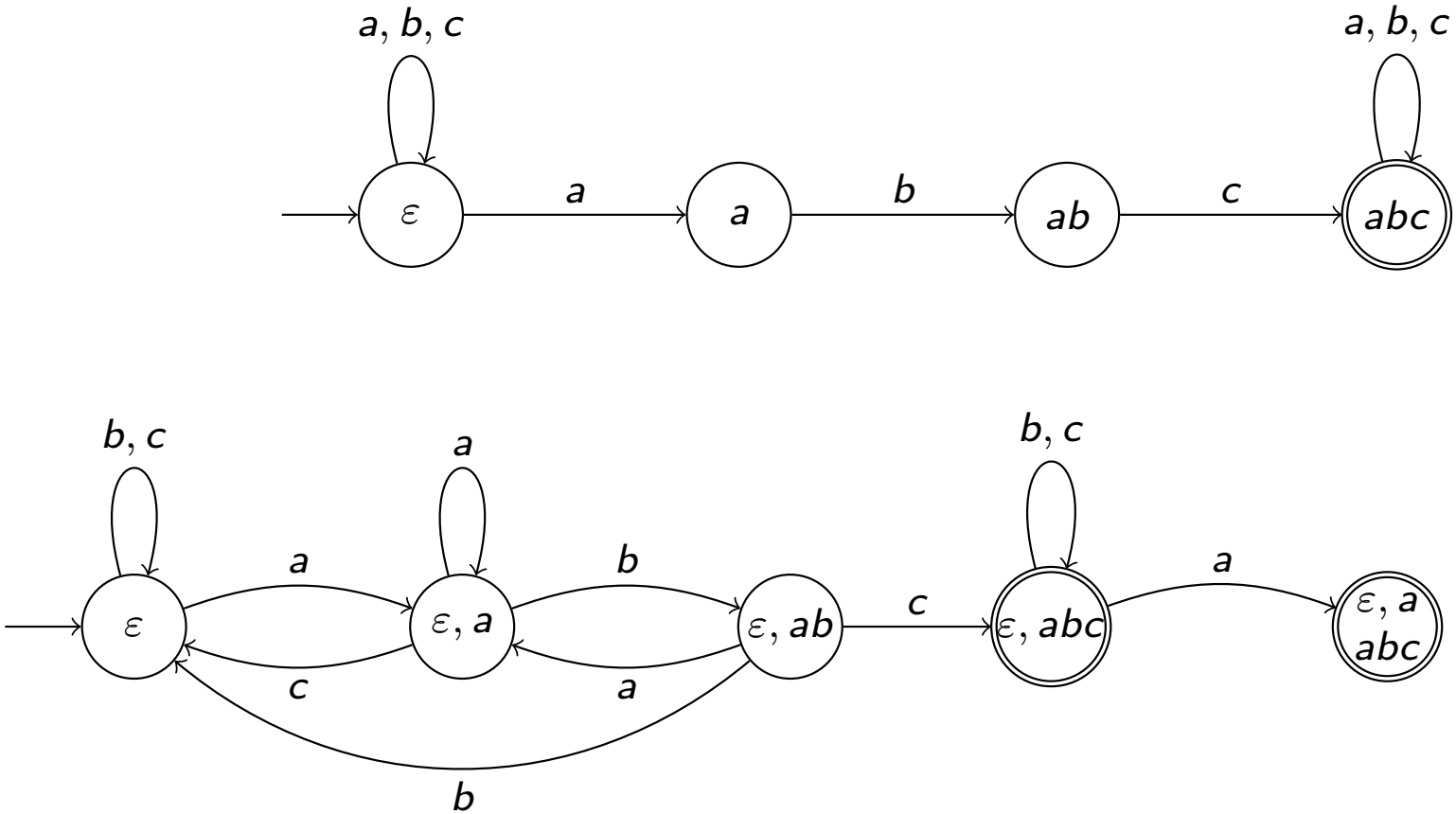
NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel 1:



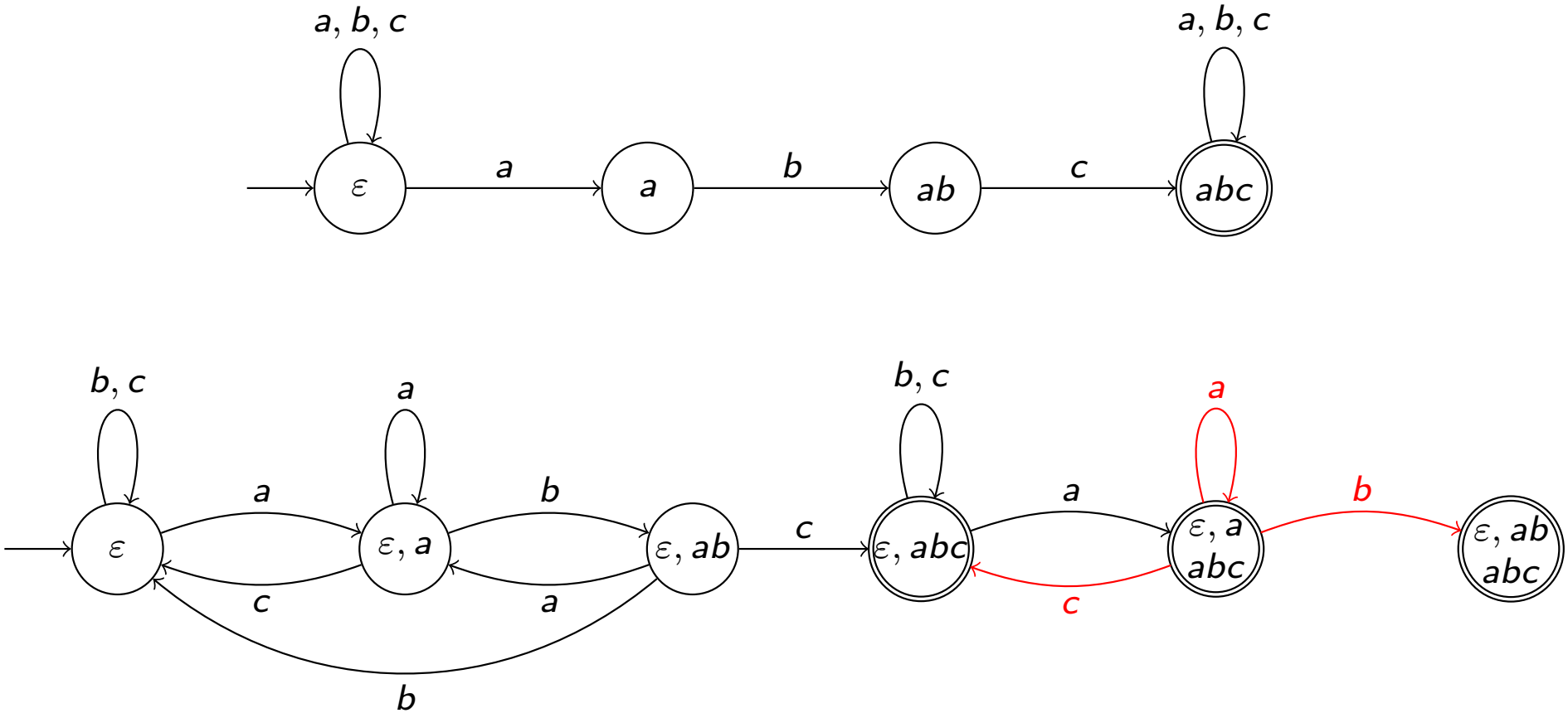
NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel 1:



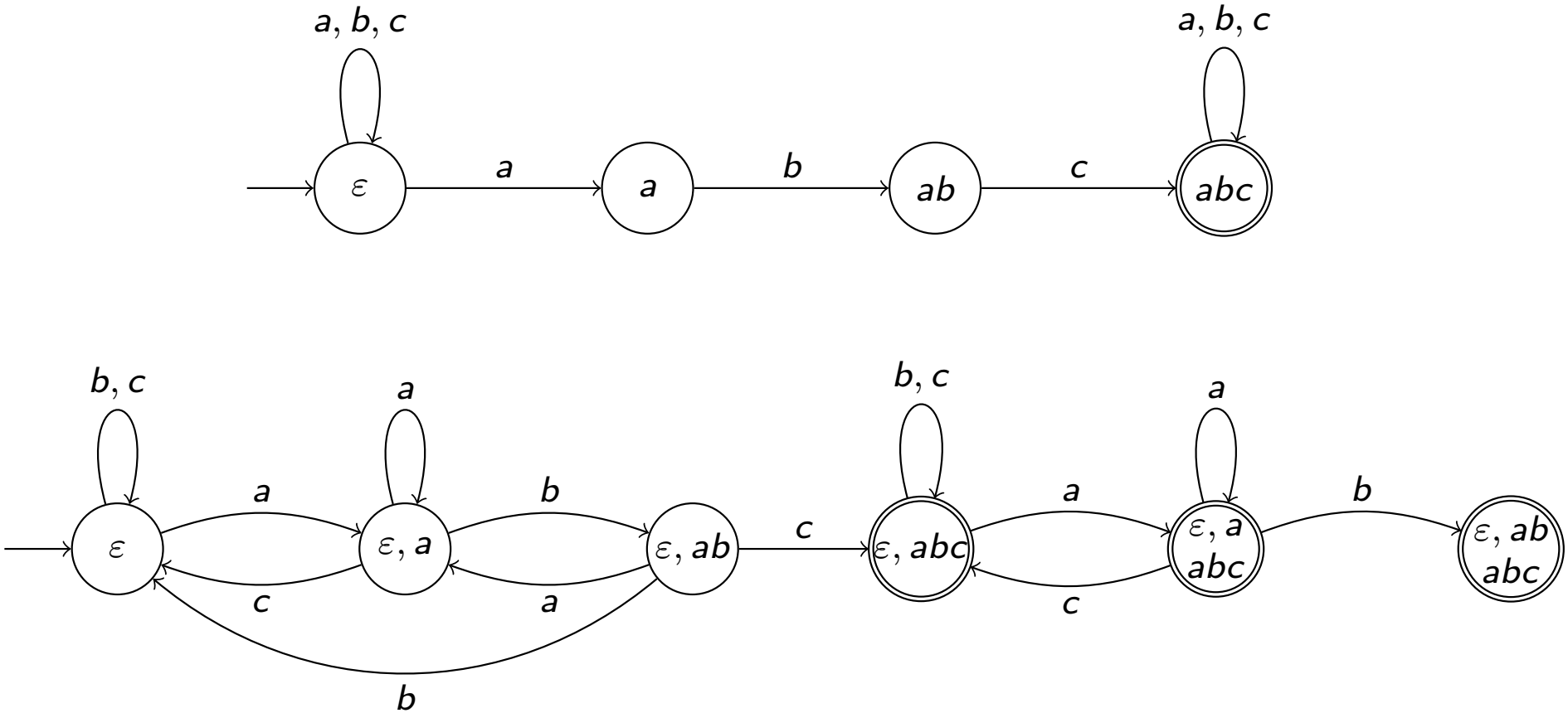
NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel 1:



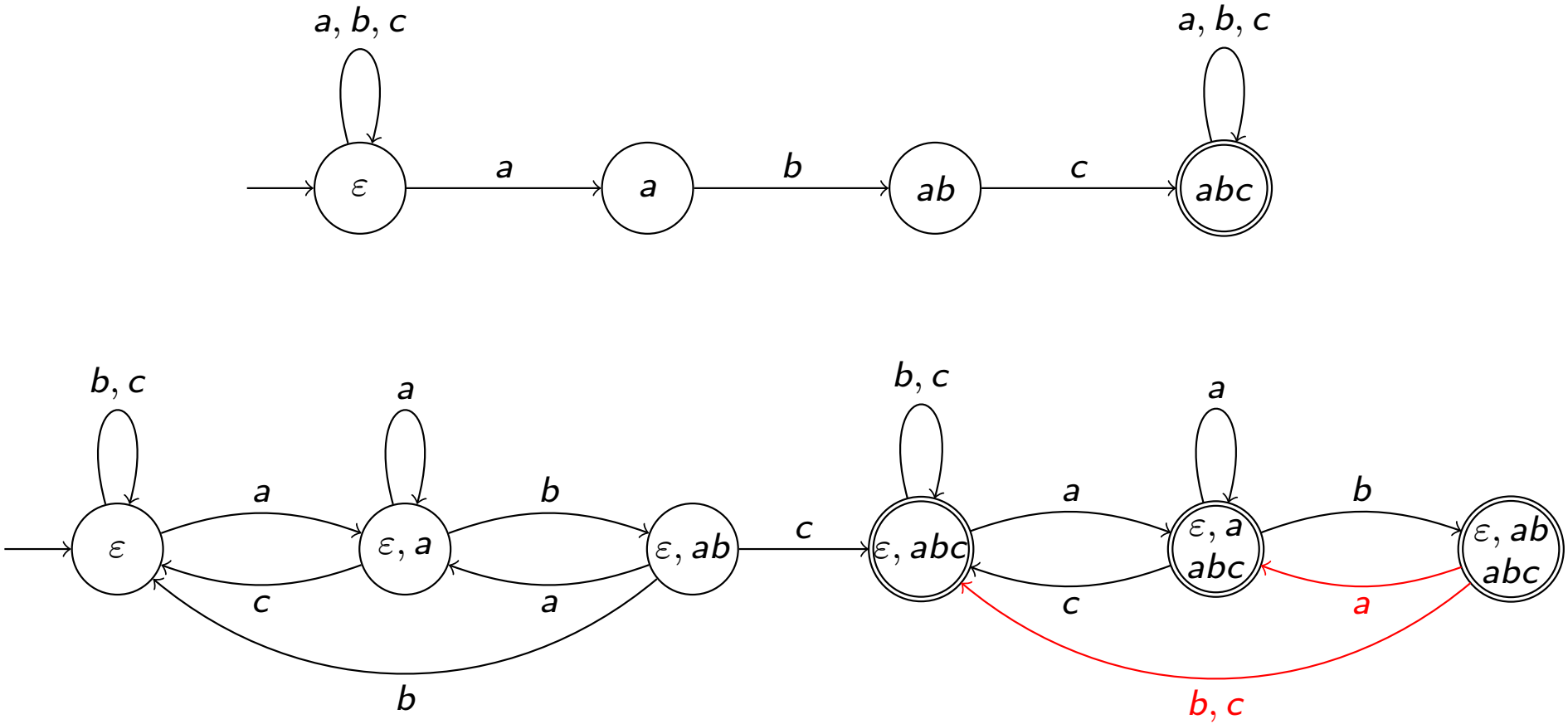
NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel 1:



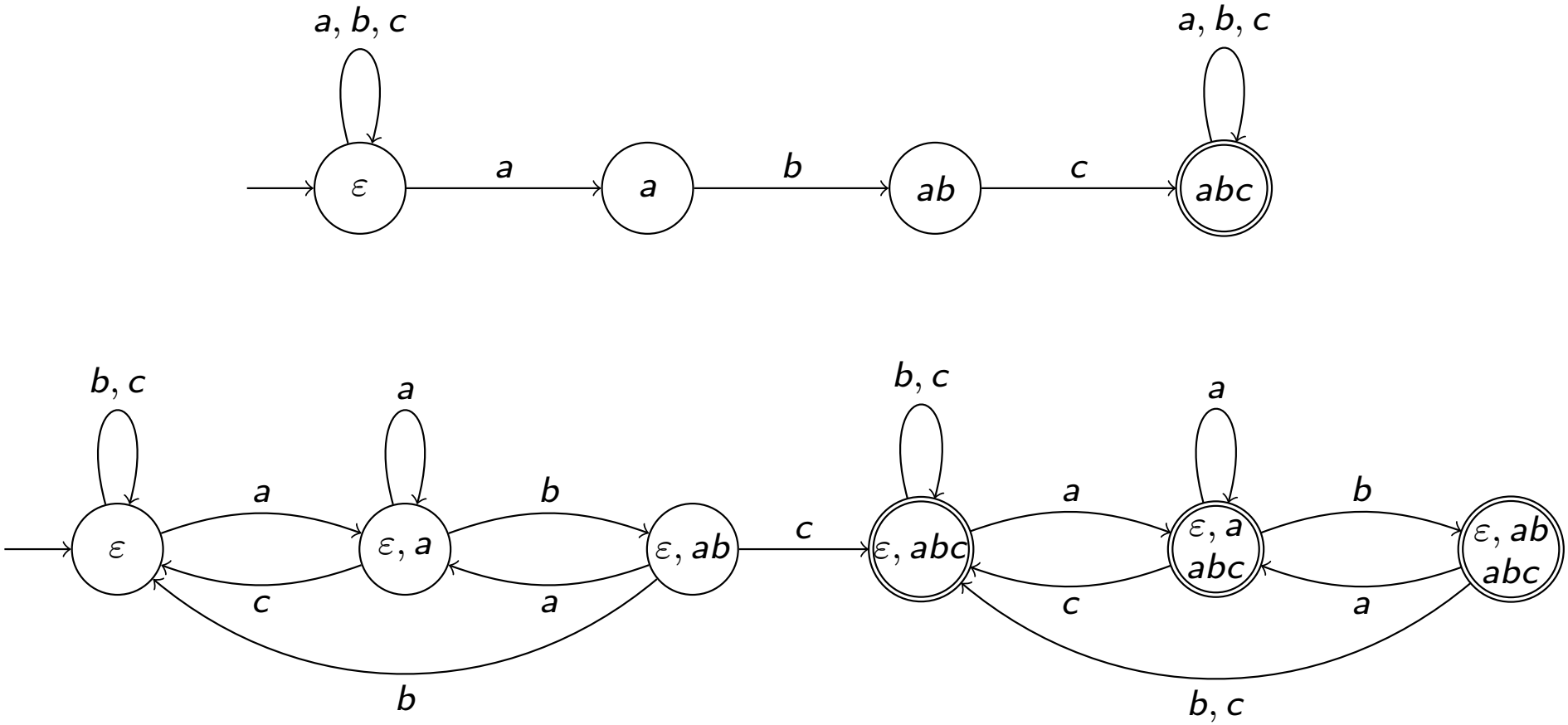
NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel 1:



NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel 1:

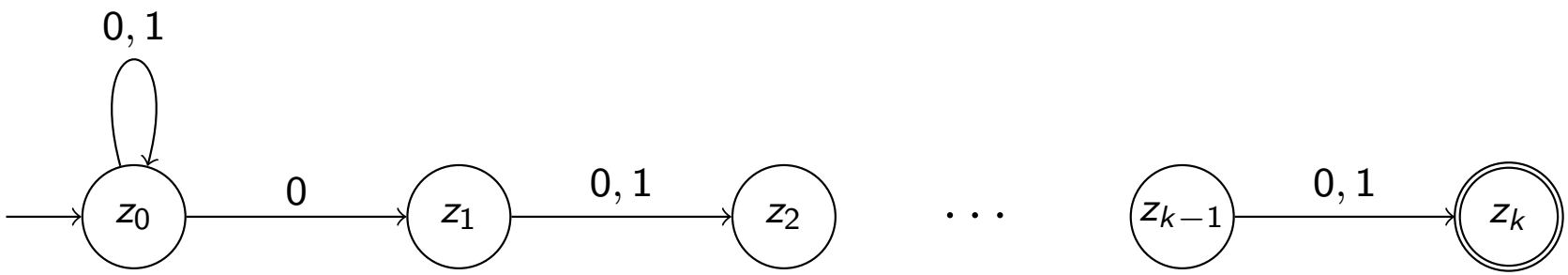


NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel 2: Für $k \geq 1$ sei

$$L_k = \{w \in \{0,1\}^* \mid \ |w| \geq k, \text{das } k\text{-letzte Zeichen von } w \text{ ist } 0\}.$$

(A) Es gibt einen NFA M mit $k+1$ Zuständen und $T(M) = L_k$:



NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

(B) Es gibt keinen DFA M mit weniger als 2^k Zuständen und $T(M) = L_k$.

Beweis von (B):

Angenommen, $M = (Z, \{0,1\}, \delta, z_0, E)$ wäre ein DFA mit weniger als 2^k Zuständen und $T(M) = L_k$.

Dann gibt es Wörter $w_1, w_2 \in \{0,1\}^k$ mit $w_1 \neq w_2$ und $\widehat{\delta}(z_0, w_1) = \widehat{\delta}(z_0, w_2)$ (denn es gibt 2^k viele Wörter in $\{0,1\}^k$).

Sei $i \in \{1, \ldots, k\}$ die erste Position, an der sich w_1 und w_2 unterscheiden.

Sei $w \in \{0,1\}^{i-1}$ beliebig.

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Dann existieren Wörter $v, v' \in \{0,1\}^{k-i}$ und $u \in \{0,1\}^{i-1}$ mit (o.B.d.A.)

$$w_1 w = u0vw \quad \text{und} \quad w_2 w = u1v'w.$$

Wegen $|vw| = |v'w| = k - i + i - 1 = k - 1$ gilt

$$w_1 w \in L_k \quad \text{und} \quad w_2 w \notin L_k.$$

Aber:

$$\widehat{\delta}(z_0, w_1 w) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(z_0, w_1), w) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(z_0, w_2), w) = \widehat{\delta}(z_0, w_2 w),$$

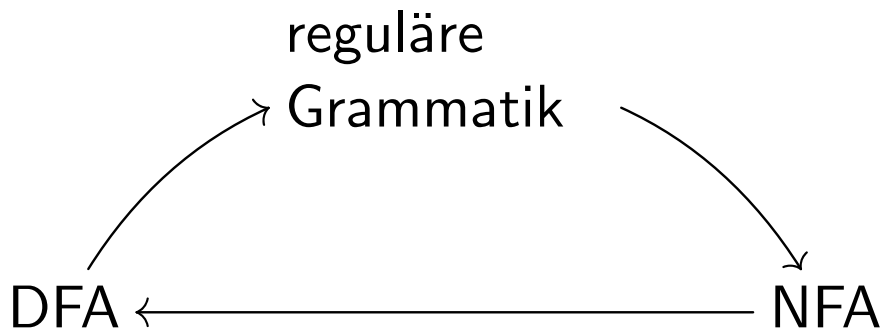
d.h. $w_1 w \in L_k \Leftrightarrow w_2 w \in L_k$. Widerspruch!

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Wir können nun

- NFAs in DFAs umwandeln und
- DFAs in reguläre Grammatiken umwandeln.

Es fehlt noch die Richtung "reguläre Grammatik $\rightarrow$ NFA", dann haben wir die Äquivalenz aller dieser Formalismen gezeigt.



NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Satz (Reguläre Grammatiken $\rightarrow$ NFAs)

Zu jeder regulären Grammatik G gibt es einen NFA M mit $L(G) = T(M)$.

Beweis:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik.

Wir definieren den NFA $M = (V \cup \{X\}, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$, wobei $X \notin V$ und

$$\delta(A, a) = \{B \mid (A \rightarrow aB) \in P\} \cup \{X \mid (A \rightarrow a) \in P\} \text{ für } A \in V, a \in \Sigma$$

$$\delta(X, a) = \emptyset \text{ für } a \in \Sigma$$

$$E = \begin{cases} \{S, X\} & \text{falls } (S \rightarrow \varepsilon) \in P \\ \{X\} & \text{falls } (S \rightarrow \varepsilon) \notin P \end{cases}$$

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Wegen der Konstruktion gilt

$$\varepsilon \in L(G) \iff (S \to \varepsilon) \in P \iff \{S\} \cap E \neq \emptyset \iff \varepsilon \in T(M).$$

Wir müssen also noch für alle Wörter $w \in \Sigma^+$ zeigen:

$$w \in L(G) \iff w \in T(M).$$

Behauptung: Für alle $w \in \Sigma^*$ und alle $A, B \in V$ gilt:

$$A \Rightarrow_G^* wB \iff B \in \widehat{\delta}(\{A\}, w)$$

Wir zeigen diese Behauptung durch Induktion über $|w|$.

Induktionsanfang: $w = \varepsilon$. Es gilt:

$$A \Rightarrow_G^* B \iff A = B \iff B \in \{A\} = \widehat{\delta}(\{A\}, \varepsilon)$$

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Induktionsschritt: Sei $w = av$ ($a \in \Sigma$, $v \in \Sigma^*$) und gelte die Behauptung bereits für das Wort v.

$$\begin{aligned}
A \Rightarrow_G^* avB &\iff \exists C \in V : (A \to aC) \in P \text{ und } C \Rightarrow_G^* vB \\
&\iff \exists C \in V : C \in \delta(A, a) \text{ und } B \in \widehat{\delta}(\{C\}, v) \\
&\iff \exists C \in V \cup \{X\} : C \in \delta(A, a) \text{ und } B \in \widehat{\delta}(\{C\}, v) \\
&\iff B \in \widehat{\delta}(\{A\}, av)
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

Sei nun $w \in \Sigma^+$, etwa $w = va$ mit $a \in \Sigma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
va \in L(G) &\iff \exists A \in V : S \Rightarrow_G^* vA \text{ und } (A \to a) \in P \\
&\overset{\text{Beh.}}{\iff} \exists A \in V : A \in \widehat{\delta}(\{S\}, v) \text{ und } X \in \delta(A, a) \\
&\iff \exists A \in V \cup \{X\} : A \in \widehat{\delta}(\{S\}, v) \text{ und } X \in \delta(A, a) \\
&\iff X \in \widehat{\delta}(\{S\}, va) \\
&\iff va \in T(M)
\end{aligned}$$

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beachte für die letzte Äquivalenz: Entweder

- X ist der einzige Endzustand von M oder
- S ist der zweite Endzustand.

  Dann gilt $(S \to \varepsilon) \in P$.

  Wegen der ε-Sonderregelung kommt dann S nicht auf der rechten Seite einer Produktion aus P vor.

  Also gilt $S \notin \delta(A, a)$ für alle $A \in V \cup \{X\}$, $a \in \Sigma$.

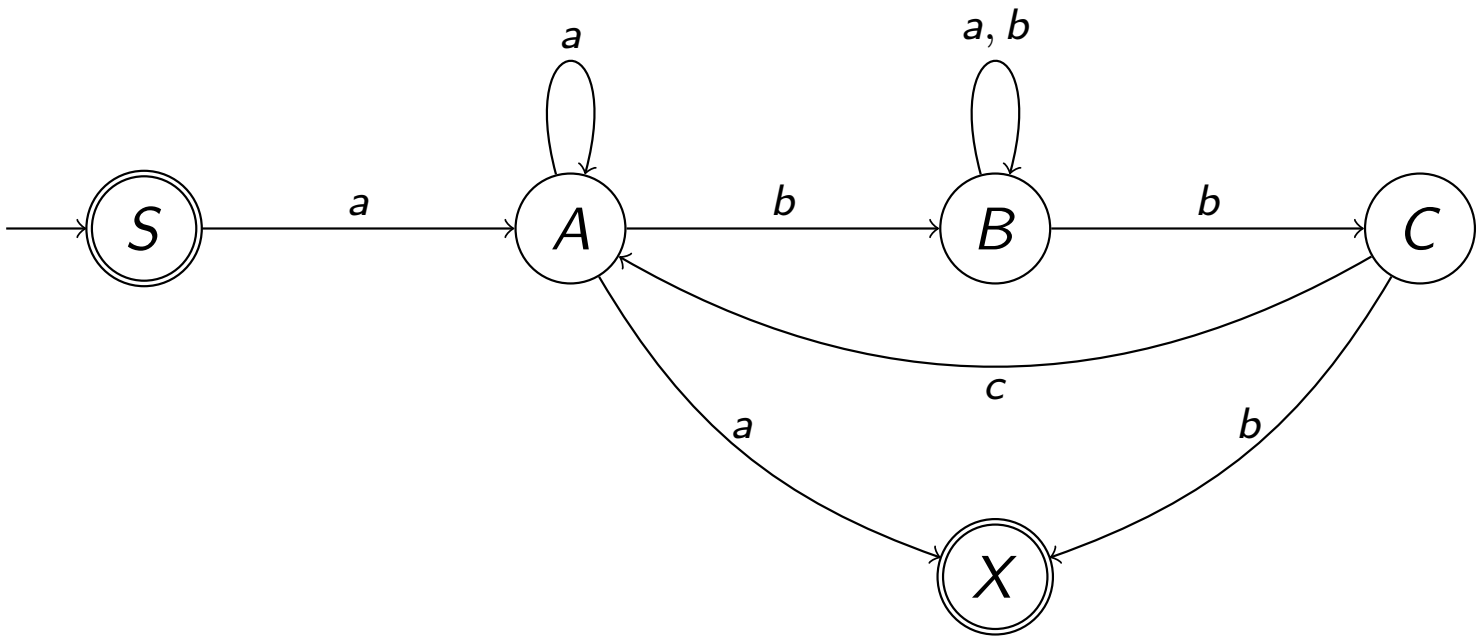
  Hieraus folgt $S \notin \widehat{\delta}(\{S\}, va)$. □

NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel: Sei G die reguläre Grammatik mit folgenden Produktionen (wir verwenden die Backus-Naur Form, siehe Folie 41):

$$S \to \varepsilon \mid aA \qquad A \to aA \mid bB \mid a$$
$$B \to aB \mid bB \mid bC \qquad C \to cA \mid b$$

Die Konstruktion von Folie 84 liefert den folgenden NFA:



NFAs, DFAs und reguläre Grammatiken

Zwischenzusammenfassung

Wir haben verschiedene Modelle zur Beschreibung regulärer Sprachen kennengelernt:

- Reguläre Grammatiken: Schaffen die Verbindung zur Chomsky-Hierarchie. Werden zur Erzeugung von Sprachen eingesetzt. Sind weniger gut geeignet, um zu entscheiden, ob ein bestimmtes Wort zur Sprache gehört.
- NFAs: Erlauben oft kleine, kompakte Darstellungen von Sprachen. Sind, wegen ihres Nichtdeterminismus, genauso wie Grammatiken weniger gut für die Lösung des Wortproblems geeignet. Besitzen aber eine intuitive graphische Notation.
- DFAs: Können gegenüber äquivalenten NFAs exponentiell größer sein. Sobald jedoch ein DFA vorliegt, erlaubt dieser eine effiziente Lösung des Wortproblems (einfach den Übergängen des Automaten nachlaufen und überprüfen, ob ein Endzustand erreicht wird).

Reguläre Ausdrücke

Alle Modelle benötigen jedoch relativ viel Schreibaufwand und Platz für die Notation. Gesucht wird also eine kompaktere Repräsentation.
Dies sind reguläre Ausdrücke.

Definition (reguläre Ausdrücke)

Die Menge $\mathrm{Reg}(\Sigma)$ der regulären Ausdrücke über dem Alphabet Σ ist die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

- $\emptyset \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, $\varepsilon \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, $\Sigma \subseteq \mathrm{Reg}(\Sigma)$.
- Wenn $\alpha, \beta \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, dann auch $\alpha\beta, (\alpha|\beta), (\alpha)^* \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$.

Bemerkungen:

- Statt $(\alpha|\beta)$ wird oft auch $(\alpha + \beta)$ geschrieben.
- Überflüssige Klammern lassen wir häufig weg.
  Z. B. $(a|b)^*$ anstatt $((a|b))^*$.

Reguläre Ausdrücke

Zum Einsparen von Klammern verwenden wir sogenannte Operatorpräzedenzregeln:

- * bindet stärker als die Konkatenation.
- Konkatenation bindet stärker als $|$.

Beispiel: $ab^*|c$ lesen wir als $(a(b)^*|c)$.

Dies sind die gleichen Operatorpräzedenzregeln die man vom Rechnen mit den arithmetischen Operatoren $+$, $\cdot$ und Potenzieren kennt.

$xy^n + z$ lesen wir als $((x \cdot (y)^n) + z)$.

Reguläre Ausdrücke

Nach der Festlegung der Syntax regulärer Ausdrücke, müssen wir auch deren Bedeutung (Semantik) festlegen.

Die Semantik eines reguläre Ausdruck ist eine Sprache:

Definition (Sprache eines regulären Ausdrucks)

- $L(\emptyset) = \emptyset$ (leere Sprache), $\quad L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$, $\quad L(a) = \{a\}$ für $a \in \Sigma$.
- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$, wobei $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$ für zwei Sprachen L_1, L_2 (Konkatenation von L_1 und L_2).
- $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- $L((\alpha)^*) = (L(\alpha))^*$, wobei $L^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \geq 0, w_1, \ldots, w_n \in L\}$ für eine Sprache L

Reguläre Ausdrücke

Beispiel für Konkatenation von Sprachen:

$$\{a, b, ab\}\{c, ba\} = \{ac, bc, abc, aba, bba, abba\}.$$

Bemerkungen zum $*$-Operator: $L^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \in \mathbb{N}, w_i \in L\}$

- Für $n = 0$ ist $w_1 \cdots w_n = \varepsilon$.
- L^* enthält immer das leere Wort ε.
  Spezialfall: $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.
- Der Operator $*$ wird oft Kleenesche Hülle genannt. Nur durch ihn kann man unendliche Sprachen erzeugen.
  Genauer: L^* ist unendlich genau dann wenn $L \cap \Sigma^+ \neq \emptyset$
- Beispiel für die Anwendung des $*$-Operators:

  Sei $L = \{a, bb, cc\}$. Dann gilt
  $L^* = \{\varepsilon, a, bb, cc, aa, abb, acc, bba, bbbb, bbcc, cca, ccbb, cccc, \dots\}$

  Alle Kombinationen beliebiger Länge sind möglich.

Reguläre Ausdrücke

Weitere Bemerkungen:

- Beachten Sie: reguläre Ausdrücke sind rein syntaktische Ausdrücke. Erst durch die Definition auf Folie 92 wird einem regulären Ausdruck eine Sprache zugeordnet.
- Die Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik findet man in vielen Bereichen der Informatik (Programmiersprachen, Logik, etc.)
- Bei Programmiersprachen definiert man auch erst, was syntaktische korrekte Programme sind. Danach definiert man die Semantik eines Programms (was macht das Programm).
  Dies kann z.B. die von einem Programm berechnete Funktion sein.
  Dies werden wir später auch für sehr einfache Programmiersprachen (GOTO-Programme, While-Programme) machen.

Reguläre Ausdrücke

- Formal sollte man auch zwischen dem regulären Ausdruck $\emptyset$ und der regulären Sprache $\emptyset$ (leere Sprache) unterscheiden, aber wir wollen es nicht übertreiben.
- Häufig werden die Sprachen $\emptyset$ und $\{\varepsilon\}$ verwechselt.
  $\emptyset$ ist die leere Sprache (hat null Elemente).
  $\{\varepsilon\}$ ist eine Sprache, die genau ein Wort (das leere Wort) enthält.

Reguläre Ausdrücke

Beispiele für reguläre Ausdrücke über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Beispiel 1: Sprache aller Wörter, die mit a beginnen und mit bb enden

$$\alpha = a(a|b)^* bb$$

Beispiel 2: Sprache aller Wörter, die das Teilwort aba enthalten.

$$\alpha = (a|b)^* aba(a|b)^*$$

Beispiel 3: Sprache aller Wörter, die gerade viele a's enthalten.

$$\alpha = (b^* ab^* a)^* b^* \qquad \text{oder} \qquad \alpha = (b \mid ab^* a)^*$$

Reguläre Ausdrücke

Satz (reguläre Ausdrücke $\rightarrow$ NFAs)

Zu jedem regulären Ausdruck γ gibt es einen NFA M mit $L(\gamma) = T(M)$.

Beweis: Induktion über den Aufbau von γ.

Induktionsanfang: Für $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \varepsilon$, $\gamma = a$ ($a \in \Sigma$) gibt es offensichtlich entsprechende NFAs.

Induktionsschritt: Sei nun $\gamma = \alpha\beta$. Dann gibt es NFAs

$$\begin{aligned} M_\alpha &= (Z_\alpha, \Sigma, \delta_\alpha, S_\alpha, E_\alpha) \\ M_\beta &= (Z_\beta, \Sigma, \delta_\beta, S_\beta, E_\beta) \end{aligned}$$

mit $T(M_\alpha) = L(\alpha)$ und $T(M_\beta) = L(\beta)$.

Wir können annehmen, dass $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$.

Reguläre Ausdrücke

Wir verknüpfen nun M_α und M_β sequentiell zu einem NFA M:

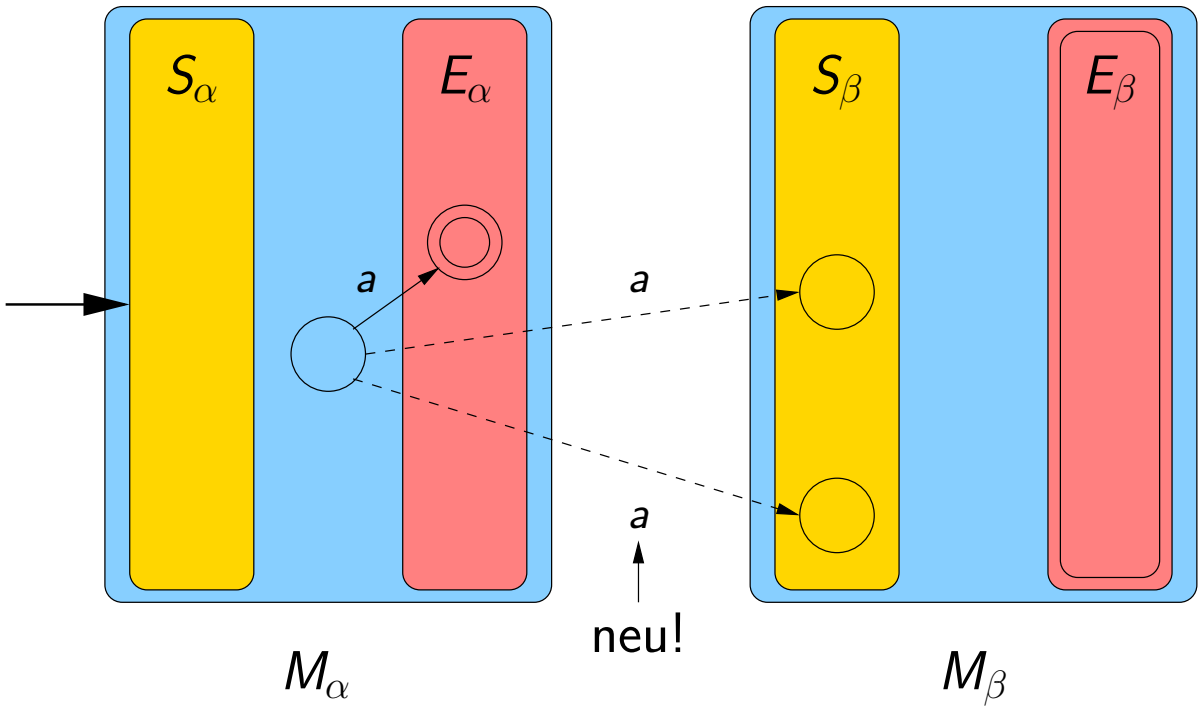
- M hat als Zustände die Vereinigung beider Zustandsmengen, die gleichen Startzustände wie M_α und die gleichen Endzustände wie M_β. Falls $\varepsilon \in L(\alpha)$, so sind auch die Startzustände von M_β Startzustände von M.
- Alle Übergänge von M_α bzw. M_β bleiben erhalten. Alle Zustände, die einen Pfeil zu einem Endzustand von M_α haben, erhalten zusätzlich genauso beschriftete Pfeile zu allen Startzuständen von M_β.

Formal: $M = (Z_\alpha \cup Z_\beta, \Sigma, \delta, S, E_\beta)$, wobei

$$S = \begin{cases} S_\alpha & \text{falls } \varepsilon \notin L(\alpha) \\ S_\alpha \cup S_\beta & \text{falls } \varepsilon \in L(\alpha) \end{cases}$$

$$\delta(z,a) = \begin{cases} \delta_\beta(z,a) & \text{für } z \in Z_\beta \\ \delta_\alpha(z,a) & \text{für } z \in Z_\alpha \text{ mit } \delta_\alpha(z,a) \cap E_\alpha = \emptyset \\ \delta_\alpha(z,a) \cup S_\beta & \text{für } z \in Z_\alpha \text{ mit } \delta_\alpha(z,a) \cap E_\alpha \neq \emptyset \end{cases}$$

Reguläre Ausdrücke



Es gilt $T(M) = T(M_\alpha)T(M_\beta) = L(\alpha)L(\beta) = L(\alpha\beta) = L(\gamma)$

Reguläre Ausdrücke

Sei nun $\gamma = (\alpha \mid \beta)$. Dann gibt es NFAs

$$\begin{aligned} M_\alpha &= (Z_\alpha, \Sigma, \delta_\alpha, S_\alpha, E_\alpha) \\ M_\beta &= (Z_\beta, \Sigma, \delta_\beta, S_\beta, E_\beta) \end{aligned}$$

mit $T(M_\alpha) = L(\alpha)$ und $T(M_\beta) = L(\beta)$.

Wir können annehmen, dass $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$.

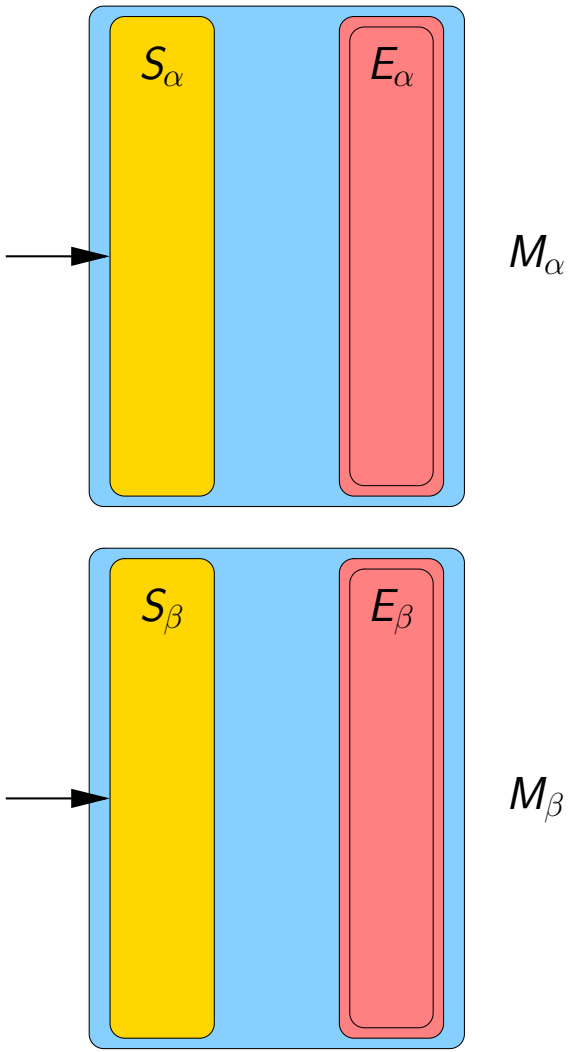
Wir bauen nun aus diesen zwei NFAs einen Vereinigungs-NFA M:

- M hat als Zustände die Vereinigung beider Zustandsmengen. Ebenso ergeben sich die Startzustände als Vereinigung der Startzustandsmengen und die Endzustände als Vereinigung der Endzustandsmengen.
- Alle Übergänge von M_α bzw. M_β bleiben erhalten.

Formal: $M = (Z_\alpha \cup Z_\beta, \Sigma, \delta, S_\alpha \cup S_\beta, E_\alpha \cup E_\beta)$, wobei

$$\delta(z, a) = \begin{cases} \delta_\alpha(z, a) & \text{für } z \in Z_\alpha \\ \delta_\beta(z, a) & \text{für } z \in Z_\beta \end{cases}$$

Reguläre Ausdrücke



$$\begin{aligned} \text{Es gilt } T(M) &= T(M_\alpha) \cup T(M_\beta) \\ &= L(\alpha) \cup L(\beta) \\ &= L(\alpha \mid \beta) \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

Reguläre Ausdrücke

Sei nun $\gamma = (\alpha)^*$. Dann gibt es einen NFA

$$M_\alpha = (Z_\alpha, \Sigma, \delta_\alpha, S_\alpha, E_\alpha)$$

mit $T(M_\alpha) = L(\alpha)$.

Wir bauen aus diesem NFA nun wie folgt einen NFA M:

- Falls $\varepsilon \notin T(M_\alpha)$, so gibt es einen zusätzlichen Zustand, der sowohl Start- als auch Endzustand ist (damit auch das leere Wort erkannt wird).
- Die anderen Zustände, Start- und Endzustände sowie Übergänge bleiben erhalten.
- Alle Zustände, die einen Pfeil zu einem Endzustand von M_α haben, erhalten zusätzlich genauso beschriftete Pfeile zu allen Startzuständen von M_α (Rückkopplung).

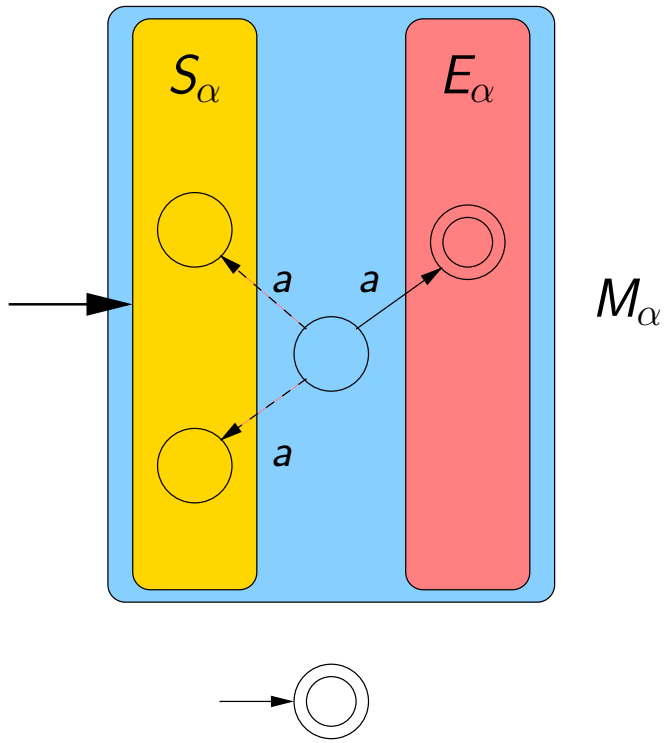
Reguläre Ausdrücke

Formal: $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei:

$$
\begin{aligned}
Z &= \begin{cases} Z_\alpha & \text{falls } \varepsilon \in L(\alpha) \\ Z_\alpha \cup \{s_0\} & \text{falls } \varepsilon \notin L(\alpha) \end{cases} \\
S &= \begin{cases} S_\alpha & \text{falls } \varepsilon \in L(\alpha) \\ S_\alpha \cup \{s_0\} & \text{falls } \varepsilon \notin L(\alpha) \end{cases} \\
E &= \begin{cases} E_\alpha & \text{falls } \varepsilon \in L(\alpha) \\ E_\alpha \cup \{s_0\} & \text{falls } \varepsilon \notin L(\alpha) \end{cases} \\
\delta(z,a) &= \begin{cases} \delta_\alpha(z,a) & \text{für } z \in Z_\alpha \text{ mit } \delta_\alpha(z,a) \cap E_\alpha = \emptyset \\ \delta_\alpha(z,a) \cup S_\alpha & \text{für } z \in Z_\alpha \text{ mit } \delta_\alpha(z,a) \cap E_\alpha \neq \emptyset \end{cases}
\end{aligned}
$$

Hierbei gilt $s_0 \notin Z_\alpha$.

Reguläre Ausdrücke



evtl. zusätzl. Zustand

Es gilt $T(M) = (T(M_\alpha))^* = (L(\alpha))^* = L(\alpha^*) = L(\gamma)$.

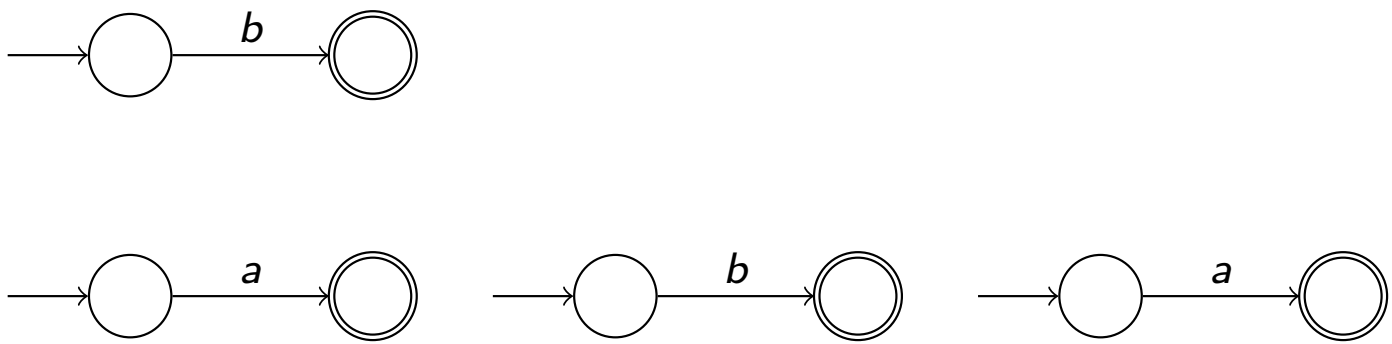
Reguläre Ausdrücke

Beispiel: Wie konstruieren schrittweise einen NFA für den regulären Ausdruck $(b \mid ab^*a)^*$.

Reguläre Ausdrücke

Beispiel: Wie konstruieren schrittweise einen NFA für den regulären Ausdruck $(b \mid ab^*a)^*$.

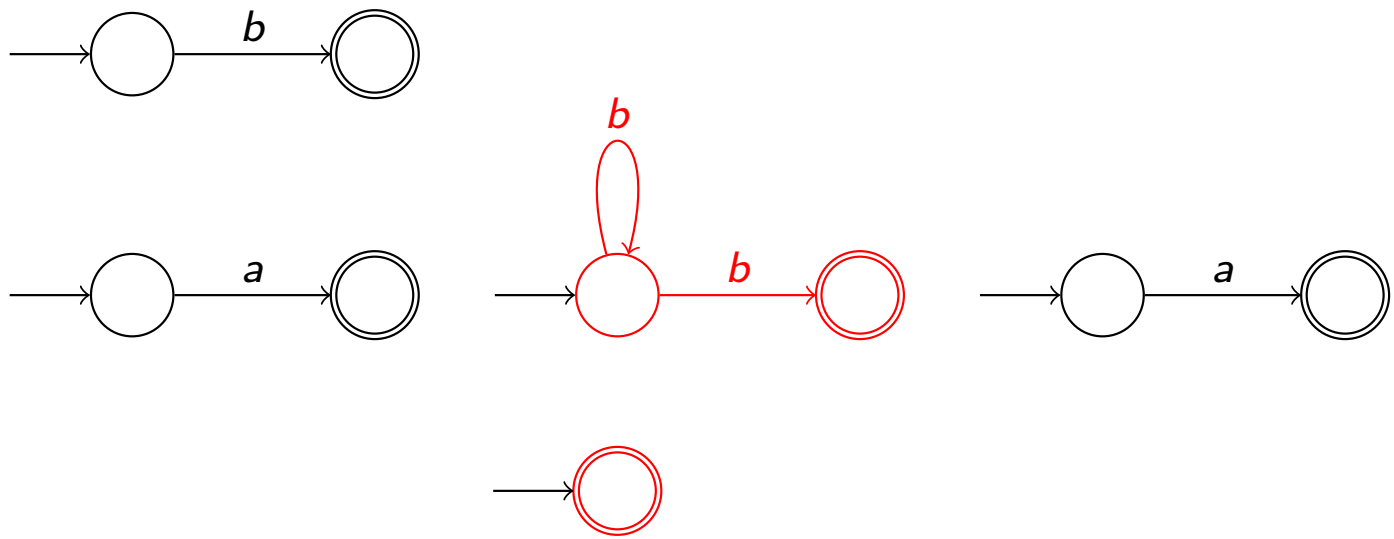
Wir beginnen mit den Übergängen für einzelne Symbole.



Reguläre Ausdrücke

Beispiel: Wie konstruieren schrittweise einen NFA für den regulären Ausdruck $(b \mid ab^*a)^*$.

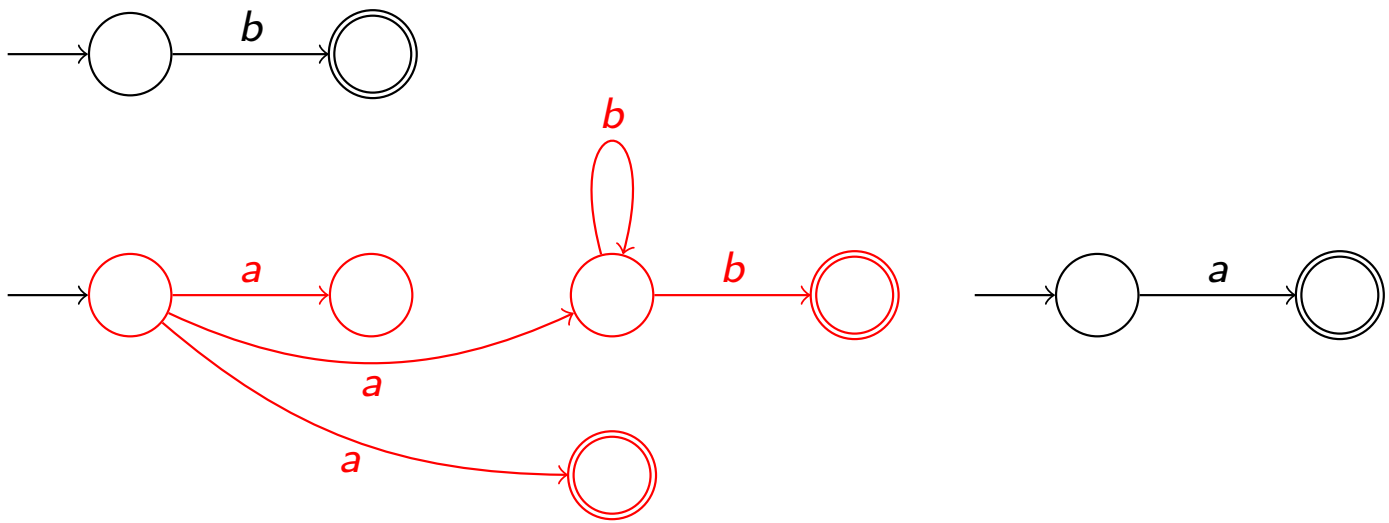
NFA für b^*



Reguläre Ausdrücke

Beispiel: Wie konstruieren schrittweise einen NFA für den regulären Ausdruck $(b \mid ab^*a)^*$.

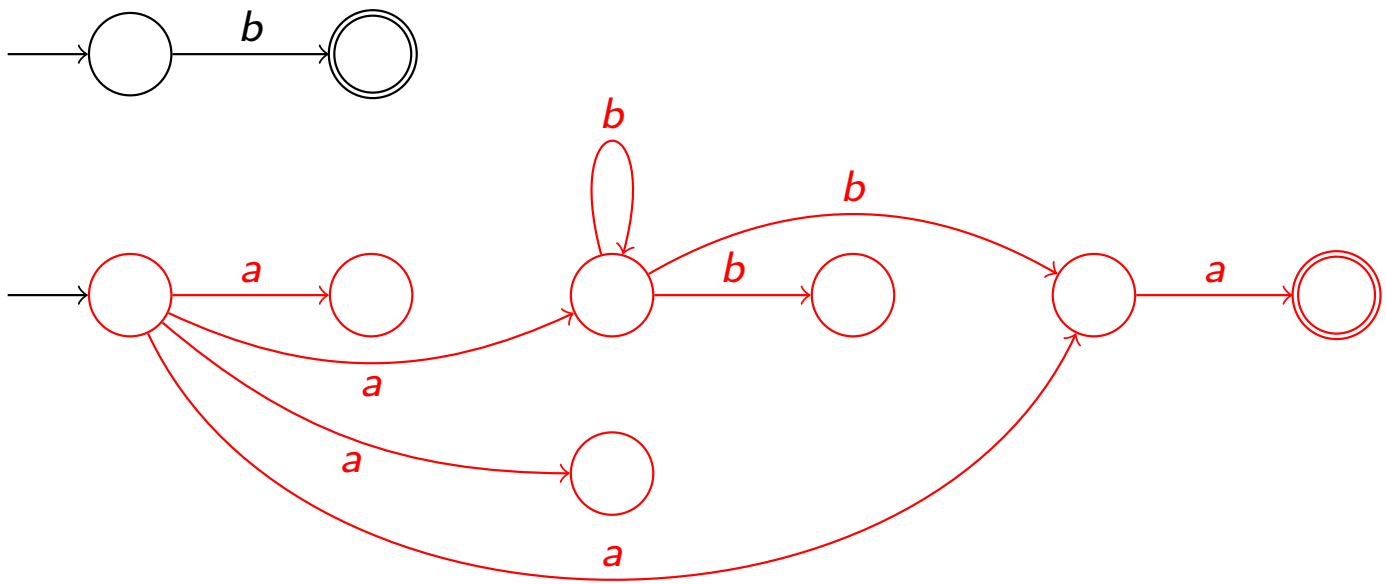
NFA für ab^*



Reguläre Ausdrücke

Beispiel: Wie konstruieren schrittweise einen NFA für den regulären Ausdruck $(b \mid ab^*a)^*$.

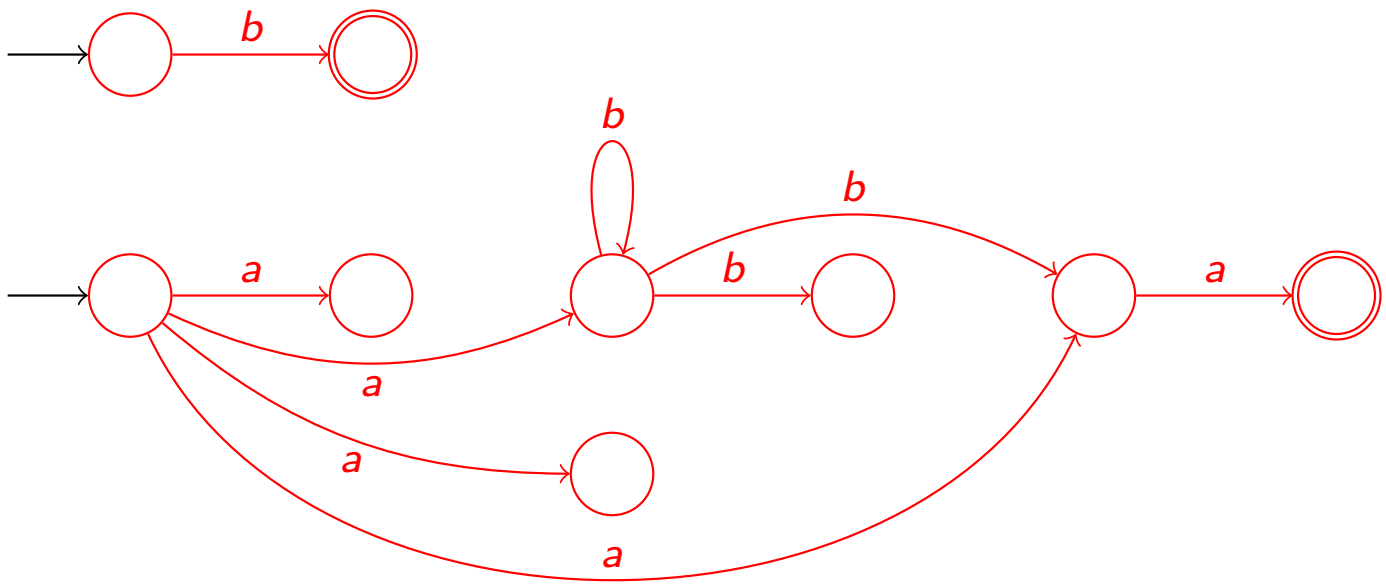
NFA für ab^*a



Reguläre Ausdrücke

Beispiel: Wie konstruieren schrittweise einen NFA für den regulären Ausdruck $(b \mid ab^*a)^*$.

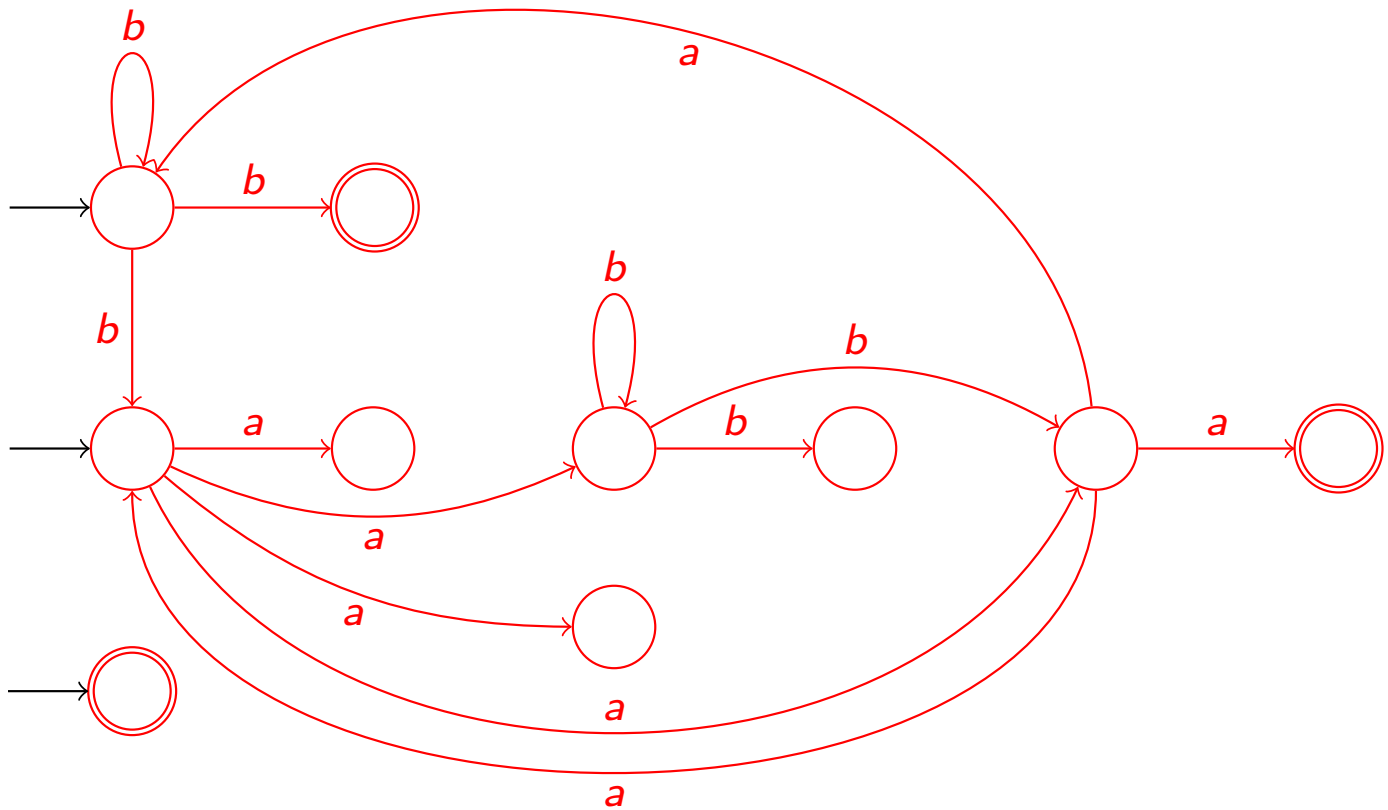
NFA für $(b \mid ab^*a)$



Reguläre Ausdrücke

Beispiel: Wie konstruieren schrittweise einen NFA für den regulären Ausdruck $(b \mid ab^*a)^*$.

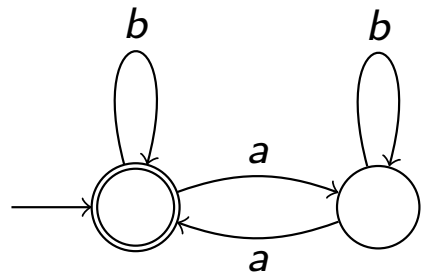
NFA für $(b \mid ab^*a)^*$



Reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung): Dieser NFA enthält viele redundante Zustände und kann vereinfacht werden.

Ein viel einfacher NFA für $(b \mid ab^*a)^*$ ist:



Reguläre Ausdrücke

Satz (DFAs $\rightarrow$ Reguläre Ausdrücke)

Zu jedem DFA M gibt es einen regulären Ausdruck γ mit $T(M) = L(\gamma)$.

Beweis: Sei $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ ein DFA.

Wir konstruieren einen regulären Ausdruck γ mit $T(M) = L(\gamma)$.

Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ sei

$$\text{Pref}(w) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v : w = uv, \varepsilon \neq u \neq w\}$$

die Menge aller nicht-leeren echten Präfixe von w.

Beispiel: $\text{Pref}(abbca) = \{a, ab, abb, abbc\}$

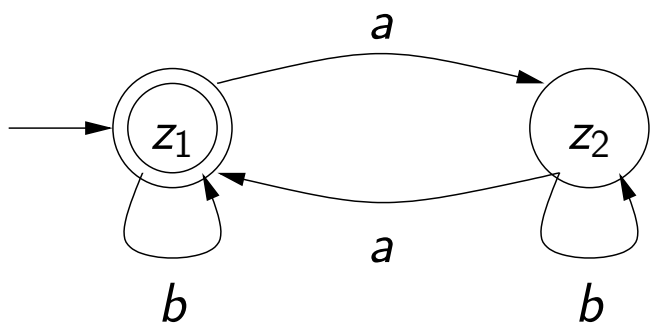
Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ sei

$$L_{i,j}^k = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(z_i, w) = z_j, \forall u \in \text{Pref}(w) : \widehat{\delta}(z_i, u) \in \{z_1, \ldots, z_k\}\}.$$

Reguläre Ausdrücke

Intuitiv: Ein Wort w gehört zu $L^k_{i,j}$ genau dann, wenn w den Zustand z_i in den Zustand z_j überführt, und dabei kein Zwischenzustand (ausser ganz am Anfang und ganz am Ende) aus $\{z_{k+1}, \ldots, z_n\}$ vorkommt.

Beispiel: Betrachte den folgenden DFA M:



Dann gilt z.B.:

$$L^0_{1,1} = \{\varepsilon, b\}, \quad L^0_{1,2} = \{a\}, \quad L^1_{2,2} = \{ab^n a \mid n \geq 0\} \cup \{\varepsilon, b\}$$

und $L^2_{1,1} = T(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ w enthält gerade viele a's$\}$.

Reguläre Ausdrücke

Wir konstruieren für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ reguläre Ausdrücke $\gamma_{i,j}^k$ mit $L(\gamma_{i,j}^k) = L_{i,j}^k$.

Falls $E = \{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_m}\}$, ergibt sich dann

$$L(\gamma_{1,i_1}^n \mid \gamma_{1,i_2}^n \mid \cdots \mid \gamma_{1,i_m}^n) = T(M).$$

Konstruktion von $\gamma_{i,j}^k$ durch Induktion über $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Induktionsanfang: $k = 0$. Es gilt:

$$L_{i,j}^0 = \begin{cases} \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\} & \text{falls } i = j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\} & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Einen regulären Ausdruck $\gamma_{i,j}^0$ mit $L(\gamma_{i,j}^0) = L_{i,j}^0$ können wir leicht angeben.

Induktionsschritt: Sei $0 \leq k < n$ und seien die regulären Ausdrücke $\gamma_{p,q}^k$ für alle $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ bereits konstruiert.

Reguläre Ausdrücke

Behauptung: Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^{k} \cup L_{i,k+1}^{k} (L_{k+1,k+1}^{k})^* L_{k+1,j}^{k}. \tag{2}$$

Begründung:

$\subseteq$: Sei $w \in L_{i,j}^{k+1}$ und sei $\ell \geq 0$ so, dass der Zustand z_{k+1} auf dem eindeutigen mit w beschrifteten Pfad von z_i nach z_j genau ℓ mal als echter Zwischenzustand auftaucht.

1.Fall: $\ell = 0$, d.h. z_{k+1} kommt garnicht als echter Zwischenzustand vor.

Dann gilt $w \in L_{i,j}^{k}$ und somit $w \in L_{i,j}^{k} \cup L_{i,k+1}^{k} (L_{k+1,k+1}^{k})^* L_{k+1,j}^{k}$.

2.Fall: $\ell > 0$.

Dann kann w als $w = w_0 w_1 \cdots w_{\ell-1} w_\ell$ geschrieben werden, wobei:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(z_i, w_0) &= z_{k+1} \\ \widehat{\delta}(z_{k+1}, w_p) &= z_{k+1} \text{ für } 1 \leq p \leq \ell - 1 \\ \widehat{\delta}(z_{k+1}, w_\ell) &= z_j \end{aligned}$$

Reguläre Ausdrücke

Es folgt $w_0 \in L^k_{i,k+1},\ w_1, \ldots, w_{\ell-1} \in L^k_{k+1,k+1},\ w_\ell \in L^k_{k+1,j}$ und somit

$$w = w_0(w_1 \cdots w_{\ell-1})w_\ell \in L^k_{i,k+1}(L^k_{k+1,k+1})^* L^k_{k+1,j}.$$

$\supseteq$: $L^k_{i,j} \subseteq L^{k+1}_{i,j}$ ist offensichtlich.

Falls $w \in L^k_{i,k+1}(L^k_{k+1,k+1})^* L^k_{k+1,j}$, existiert ein $\ell \geq 1$ und eine Faktorisierung $w = w_0 w_1 \cdots w_{\ell-1} w_\ell$ mit

$$w_0 \in L^k_{i,k+1},\ w_1, \ldots, w_{\ell-1} \in L^k_{k+1,k+1},\ w_\ell \in L^k_{k+1,j}.$$

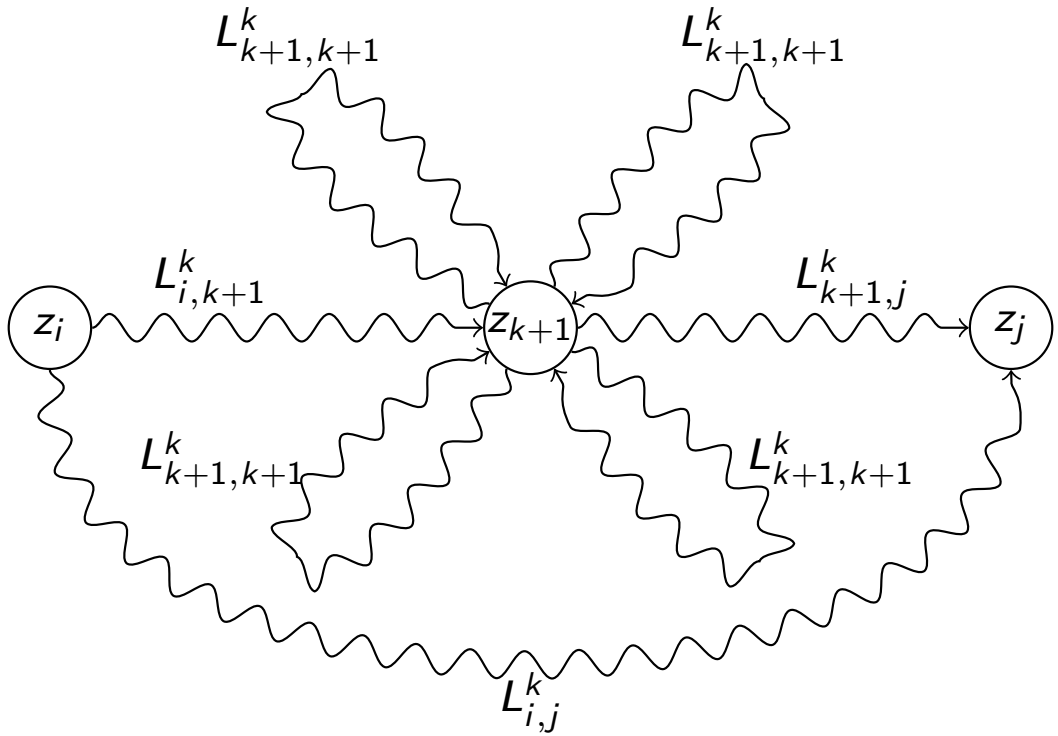
Hieraus ergibt sich leicht $w \in L^{k+1}_{i,j}$. Dies zeigt die Behauptung.

Da die regulären Ausdrücke $\gamma^k_{i,j}, \gamma^k_{i,k+1}, \gamma^k_{k+1,k+1}, \gamma^k_{k+1,j}$ schon konstruiert sind (Induktionsannahme), können wir wegen Gleichung (2) den regulären Ausdruck $\gamma^{k+1}_{i,j}$ wie folgt definieren:

$$\gamma^{k+1}_{i,j} = \gamma^k_{i,j} \mid \gamma^k_{i,k+1}(\gamma^k_{k+1,k+1})^* \gamma^k_{k+1,j}$$

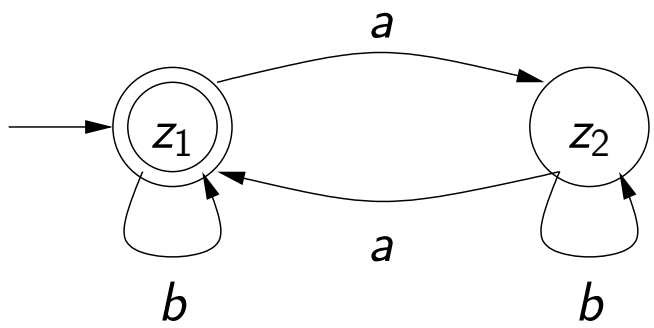
Reguläre Ausdrücke

$$L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^{k} \cup L_{i,k+1}^{k} (L_{k+1,k+1}^{k})^* L_{k+1,j}^{k}$$



Reguläre Ausdrücke

Beispiel: Betrachte den folgenden DFA:



Damit ergibt sich (bei Durchführung offensichtlicher Vereinfachungen):

$$\gamma^0_{1,1} = \varepsilon | b \qquad \gamma^0_{1,2} = a \qquad \gamma^0_{2,1} = a \qquad \gamma^0_{2,2} = \varepsilon | b$$

$$\gamma^1_{1,1} = \gamma^0_{1,1} \,|\, \gamma^0_{1,1}(\gamma^0_{1,1})^*\gamma^0_{1,1} = \varepsilon \,|\, b \,|\, (\varepsilon|b)(\varepsilon|b)^*(\varepsilon|b) = b^*$$
$$\gamma^1_{1,2} = \gamma^0_{1,2} \,|\, \gamma^0_{1,1}(\gamma^0_{1,1})^*\gamma^0_{1,2} = a \,|\, (\varepsilon|b)(\varepsilon|b)^* a = b^* a$$
$$\gamma^1_{2,1} = \gamma^0_{2,1} \,|\, \gamma^0_{2,1}(\gamma^0_{1,1})^*\gamma^0_{1,1} = a \,|\, a(\varepsilon|b)^*(\varepsilon|b) = ab^*$$
$$\gamma^1_{2,2} = \gamma^0_{2,2} \,|\, \gamma^0_{2,1}(\gamma^0_{1,1})^*\gamma^0_{1,2} = \varepsilon \,|\, b \,|\, a(\varepsilon|b)^* a = \varepsilon \,|\, b \,|\, ab^* a$$

$$\gamma^2_{1,1} = \gamma^1_{1,1} \,|\, \gamma^1_{1,2}(\gamma^1_{2,2})^*\gamma^1_{2,1} = b^* \,|\, b^* a(\varepsilon|b|ab^* a)^* ab^*$$

Reguläre Ausdrücke

Wozu sind reguläre Ausdrücke in der Praxis nützlich?

- Suchen und Ersetzen in Editoren wie z. B. `vi` oder `emacs`.
- Pattern-Matching und Verarbeitung großer Texte und Datenmengen, z.B., beim Data-Mining
  (Tools: Stream-Editor `sed`, `awk`, ...)
- Übersetzung von Programmiersprachen:

  Lexikalische Analyse – Umwandlung einer Folge von Zeichen (das Programm) in eine Folge von Tokens, in der bereits die Schlüsselwörter, Bezeichner, Daten, etc. identifiziert sind.
  (Tools: `lex`, `flex`, ...)

Abschlusseigenschaften

Definition (Abgeschlossenheit)

Gegeben sei eine Menge M und ein binärer Operator $\otimes\colon M \times M \to M$. Man sagt, eine Menge $M' \subseteq M$ ist unter $\otimes$ abgeschlossen, wenn für zwei beliebige Elemente $m_1, m_2 \in M'$ gilt: $m_1 \otimes m_2 \in M'$.

Wir betrachten hier Abschlusseigenschaften für die Menge aller regulären Sprachen (d.h. wir setzen $M =$ Menge aller Sprachen und $M' =$ Menge aller regulären Sprachen)

Die interessante Frage ist:

> Falls L_1, L_2 regulär sind, sind dann auch $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 L_2$, $\overline{L_1} = \Sigma^* \backslash L_1$ (Komplement) und L_1^* regulär?

Kurze Antwort: Die regulären Sprachen sind unter allen diesen Operationen abgeschlossen.

Abschlusseigenschaften

Warum sind Abschlusseigenschaften interessant?

Sie sind vor allem dann interessant, wenn sie konstruktiv verwirklicht werden können, das heißt, wenn man – gegeben Automaten für L_1 und L_2 – auch einen Automaten beispielsweise für den Schnitt von L_1 und L_2 konstruieren kann.

Damit hat man dann mit Automaten eine Datenstruktur für unendliche Sprachen, die man maschinell weiterverarbeiten kann.

Abschlusseigenschaften

Satz (Abschluss unter Vereinigung)

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ regulär.

Beweis:

Den Automaten für $L_1 \cup L_2$ kann man mit der selben Methode bauen wie den Automaten für $L(\alpha|\beta)$ bei der Umwandlung von regulären Ausdrücken in NFAs (Folien 100). □

Abschlusseigenschaften

Satz (Abschluss unter Komplement)

Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache ist, dann ist auch $\overline{L} = \Sigma^* \backslash L$ regulär.

Bemerkung: bei Bildung des Komplements muss immer festgelegt werden, bezüglich welcher Obermenge das Komplement gebildet werden soll. Hier ist das die Menge Σ^* aller Wörter über dem Alphabet Σ, das gerade betrachtet wird.

Beweis:

Aus einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ für L gewinnt man leicht einen DFA M' für $\overline{L}$ indem man die End- und Nicht-Endzustände vertauscht. D.h. $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \backslash E)$.

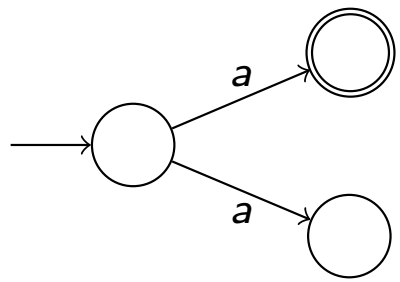
Dann gilt:
$w \in \overline{L} \iff w \notin T(M) \iff \widehat{\delta}(z_0, w) \notin E \iff \widehat{\delta}(z_0, w) \in Z \backslash E \iff w \in T(M')$. □

Abschlusseigenschaften

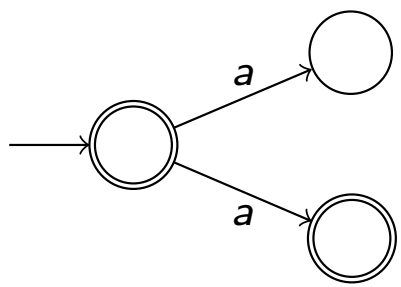
Vorsicht: In dem Beweis auf der vorherigen Folie ist es wichtig, dass M ein DFA ist.

Vertauscht man in einem NFA End- und Nicht-Endzustände, so erhält man im Allgemeinen keinen NFA für das Komlement.

Beispiel: Betrachte den folgenden NFA für die Sprache $\{a\} \subseteq \{a\}^*$.



Durch Vertauschen von End- und Nicht-Endzustände erhält man einen NFA für $\{\varepsilon, a\} \neq \{a\}^* \setminus \{a\}$:



Abschlusseigenschaften

Will man einen NFA M komplementieren (also einen NFA für $\Sigma^* \setminus T(M)$ konstruieren), so ist die im Wesentlichen beste Methode folgende:

1. Konstruiere mittels der Potenzmengenkonstruktion einen DFA M' mit $T(M') = T(M)$.
2. Vertauschen von End- und Nicht-Endzuständen in M' liefert einen DFA (und damit auch einen NFA) M'' mit $T(M'') = \Sigma^* \setminus T(M') = \Sigma^* \setminus T(M)$.

Abschlusseigenschaften

Satz (Abschluss unter Produkt/Konkatenation)

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 L_2$ regulär.

Beweis:

Den Automaten für $L_1 L_2$ kann man mit der selben Methode bauen wie den Automaten für $L(\alpha\beta)$ bei der Umwandlung von regulären Ausdrücken in NFAs (Folien 99). □

Abschlusseigenschaften

Satz (Abschluss unter der Stern-Operation)

Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch L^* regulär.

Beweis:

Den Automaten für L^* kann man mit der selben Methode bauen wie den Automaten für $L((\alpha)^*)$ bei der Umwandlung von regulären Ausdrücken in NFAs (Folien 104). □

Abschlusseigenschaften

Satz (Abschluss unter Schnitt)

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis 1:

Es gilt $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ und wir wissen bereits, dass reguläre Sprachen unter Komplement und Vereinigung abgeschlossen sind. □

Durch das Komplementieren entsteht im obigen Beweis 1 ein sehr großer Automat für $L_1 \cap L_2$.

Abschlusseigenschaften

Beweis 2:

Es gibt noch eine andere direktere Konstruktion. Dabei werden die zwei Automaten für L_1 und L_2 miteinander synchronisiert und quasi "parallelgeschaltet". Dies erfolgt durch das Bilden des Kreuzprodukts.

Seien $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, S_1, E_1)$, $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, S_2, E_2)$ NFAs mit $T(M_1) = L_1$ und $T(M_2) = L_2$. Dann akzeptiert der folgende NFA M die Sprache $L_1 \cap L_2$:

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, S_1 \times S_2, E_1 \times E_2),$$

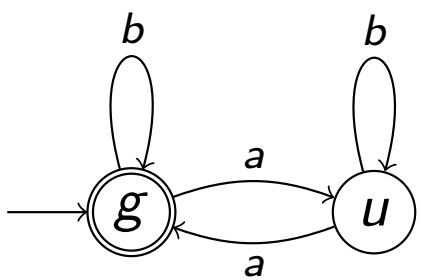
wobei $\delta((z_1, z_2), a) = \{(z_1', z_2') \mid z_1' \in \delta_1(z_1, a), z_2' \in \delta_2(z_2, a))\}$.

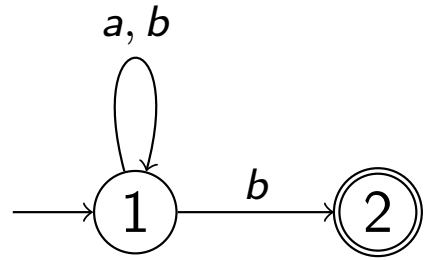
M akzeptiert ein Wort w genau dann, wenn sowohl M_1 als auch M_2 das Wort w akzeptieren. □

Abschlusseigenschaften

Beispiel für ein Kreuzprodukt:

Bilde das Kreuzprodukt der folgenden zwei Automaten:

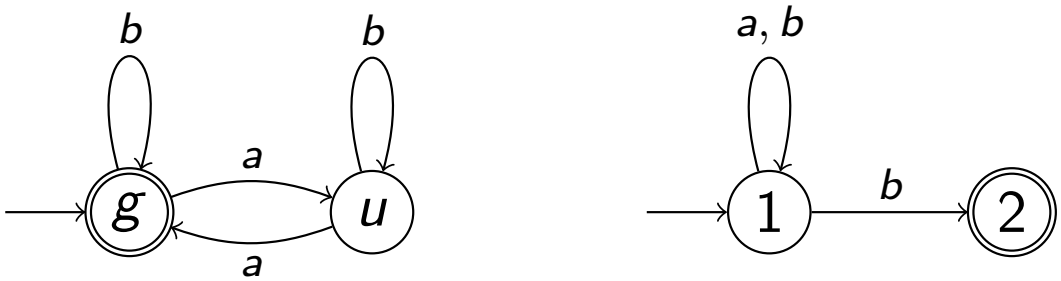


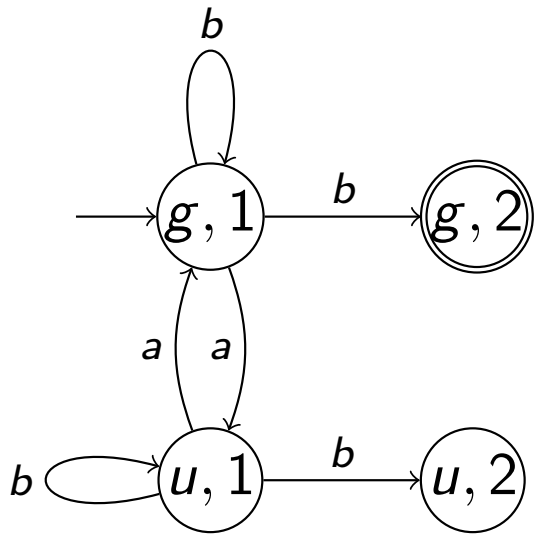


Abschlusseigenschaften

Beispiel für ein Kreuzprodukt:

Bilde das Kreuzprodukt der folgenden zwei Automaten:





Ausblick

Weitere wichtige Fragen

- Wie kann man zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist?

  Beispiel: Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$, die als Beispiel auftauchte, scheint nicht regulär zu sein. Wie kann man das zeigen?

- Wenn eine Sprache regulär ist, wie groß ist dann der kleinste Automat, der die Sprache akzeptiert?

  Gibt es überhaupt den kleinsten Automaten?

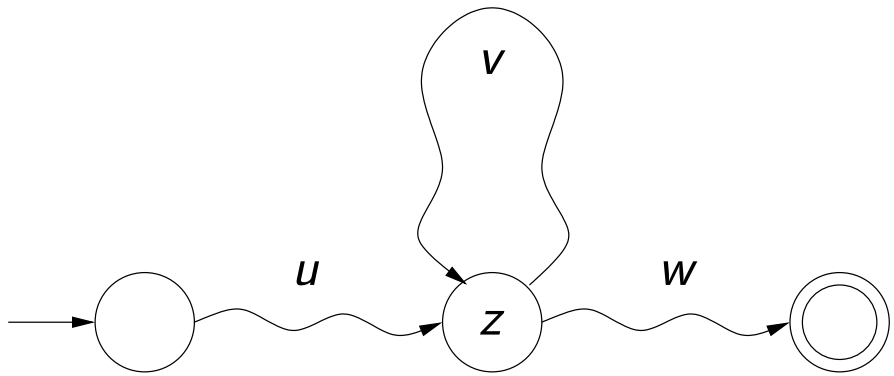
Das Pumping-Lemma

Wie beweist man, dass eine Sprache L nicht regulär ist?

Idee: Man versucht auszunutzen, dass eine reguläre Sprache von einem Automat mit endlich vielen Zuständen akzeptiert werden muss.

Das bedeutet auch: wenn ein Wort $x \in L$ ausreichend lang ist, so besucht man damit beim Durchlauf durch den Automaten mindestens einen Zustand z zweimal.

Das Pumping-Lemma



Die dadurch entstehende Schleife kann nun mehrfach (oder gar nicht) durchlaufen werden, dadurch wird das Wort $x = uvw$ "aufgepumpt" und man stellt fest, dass uw, uv^2w, uv^3w, ... auch in L liegen müssen.

Bemerkung: Es gilt $v^i = \underbrace{v \dots v}_{i\text{-mal}}$.

Das Pumping-Lemma

Außerdem kann man für u, v, w folgende Eigenschaften verlangen, wobei n die Anzahl der Zustände des Automaten ist.

1. $|v| \geq 1$: Die Schleife ist auf jeden Fall nicht trivial, d.h. sie enthält mindestens einen Übergang.
2. $|uv| \leq n =$ Anzahl der Zustände des NFA: Spätestens nach n Alphabetsymbolen wird der Zustand z das zweite Mal erreicht.

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma, *uvw*-Theorem)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl n, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, so das folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $|v| \geq 1$,
2. $|uv| \leq n$ und
3. für alle $i \geq 0$ gilt $uv^i w \in L$.

Dabei ist n die Anzahl der Zustände eines Automaten, der L erkennt.

Dieses Lemma spricht jedoch nicht über Automaten, sondern nur über die Eigenschaften der Sprache. Daher ist es dazu geeignet, Aussagen über Nicht-Regularität zu machen.

Das Pumping-Lemma

Beweis des Pumping-Lemmas:

Sei L eine reguläre Sprache.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit $L = T(M)$, sei $n = |Z|$.

Sei nun x ein beliebiges Wort mit $x \in L = T(M)$ und $|x| \geq n$, d.h. $x = a_1 a_2 \cdots a_m$ mit $m \geq n$ und $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \Sigma$.

Da $x \in T(M)$, existieren Zustände $z_0, z_1, \ldots, z_m \in Z$ mit

$$z_0 \in S, \quad z_j \in \delta(z_{j-1}, a_j) \text{ für } 1 \leq j \leq m, \quad z_m \in E.$$

Wegen $|Z| = n$ existieren $0 \leq j < k \leq n$ mit $z_j = z_k$ (Schubfachprinzip).

Sei $u = a_1 \cdots a_j$, $v = a_{j+1} \cdots a_k$ und $w = a_{k+1} \cdots a_m$.

Dann gilt:

- $|v| = k - (j+1) + 1 = k - j > 0$ und $|uv| = k \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $z_m \in \widehat{\delta}(\{z_0\}, uv^i w)$ und damit $uv^i w \in T(M) = L$,

Das Pumping-Lemma

Wie kann man das Pumping-Lemma nutzen, um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist?

Aussage des Pumping-Lemmas mit logischen Operatoren:

L regulär
$\rightarrow$
$\exists n : \forall x \in L$ mit $|x| \geq n$:
$\exists u, v, w$ mit $|v| \geq 1, |uv| \leq n, x = uvw$ und $\forall i : uv^i w \in L$

Das ist logisch äquivalent zu

$\forall n : \exists x \in L$ mit $|x| \geq n$:
$\forall u, v, w$ mit $|v| \geq 1, |uv| \leq n$ und $x = uvw : \exists i : uv^i w \notin L$
$\rightarrow L$ ist nicht regulär

Beachte hierfür: $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ und $\neg \forall x \exists y F \equiv \exists x \forall y \neg F$

Pumping-Lemma

"Kochrezept" für das Pumping-Lemma

Gegeben sei eine Sprache L.

Beispiel: $\{a^k b^k \mid k \geq 0\}$

Wir wollen zeigen, dass sie nicht regulär ist.

1. Nimm eine beliebige Zahl n. Diese Zahl darf nicht speziell gewählt werden (es muss eine beliebige Zahl sein).
2. Wähle ein geeignetes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq n$. Damit das Wort auch wirklich mindestens die Länge n hat, empfiehlt es sich, dass n (beispielsweise als Exponent) im Wort auftaucht.

   Beispiel: $x = a^n b^n$

Pumping-Lemma

"Kochrezept" für das Pumping-Lemma

3. Betrachte nun alle möglichen Zerlegungen $x = uvw$ mit den Einschränkungen $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$.

   Beispiel: Aus $uvw = a^n b^n$, $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$ folgt, dass $j \geq 0$ und $\ell \geq 1$ existieren mit:
   $u = a^j$, $v = a^\ell$ und $w = a^m b^n$ mit $j + \ell + m = n$

4. Wähle für jede dieser Zerlegungen ein i (das kann jedes Mal ein anderes i sein), so dass $uv^i w \notin L$.
   In vielen Fällen sind $i = 0$ und $i = 2$ eine gute Wahl.

   Beispiel: wähle $i = 2$, dann gilt $uv^2 w = a^{j+2\ell+m} b^n \notin L$, da $j + 2\ell + m = n + \ell \neq n$ wegen $\ell \geq 1$.

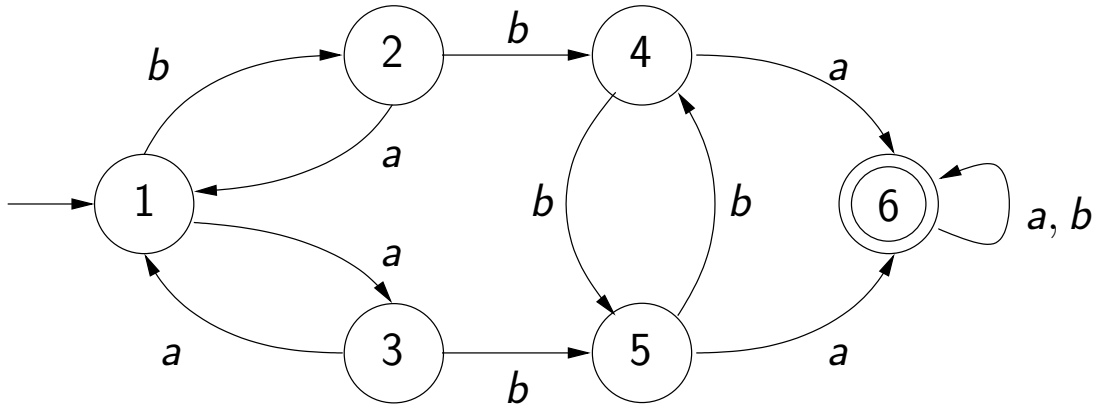
Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Wir beschäftigen uns nun mit folgenden Fragen:

- Gibt es zu jeder Sprache immer den kleinsten deterministischen/nicht-deterministischen Automat?
- Kann man direkt aus der Sprache die Anzahl der Zustände des minimalen Automaten ablesen?
- Wie bestimmt man den minimalen Automat?

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Betrachte den folgenden DFA M:



Feststellung: für die Zustände 4, 5 gilt

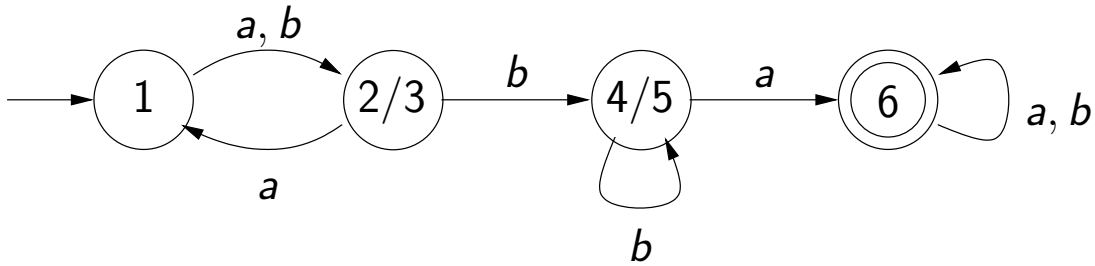
- mit einem Wort, das ein a enthält, landet man von dort aus immer im Zustand 6 (Endzustand)
- mit einem Wort, das kein a enthält, landet man von dort aus immer im Zustand 4 bzw. 5 (kein Endzustand)

Daraus folgt: 4 und 5 sind erkennungsäquivalent und können zu einem Zustand verschmolzen werden.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Ebenso: die Zustände 2 und 3 sind erkennungsäquivalent

Entstehender Automat M':



Jetzt sind keine Zustände mehr erkennungsäquivalent und sie können daher nicht weiter verschmolzen werden.

$\rightsquigarrow$ Der Automat M' ist minimal für diese Sprache.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Definition (Erkennungsäquivalenz)

Gegeben sei ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$.

Zwei Zustände $z_1, z_2 \in Z$ heißen erkennungsäquivalent genau dann, wenn für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\widehat{\delta}(z_1, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z_2, w) \in E.$$

Die Relation $\{(z_1, z_2) \in Z \times Z \mid z_1 \text{ und } z_2 \text{ sind erkennungsäquivalent}\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Zustandsmenge Z.

Einschub Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation werden im Modul *Diskrete Mathematik für Informatiker* behandelt.

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation, falls gilt:

- R ist reflexiv: für alle $a \in A$ gilt $(a, a) \in R$.
- R ist symmetrisch: für alle $a, b \in A$ gilt: wenn $(a, b) \in R$, dann auch $(b, a) \in R$.
- R ist transitiv: für alle $a, b, c \in A$ gilt: wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann auch $(a, c) \in R$.

Häufig schreibt man $a\,R\,b$ anstatt $(a, b) \in R$ (Infixschreibweise)

Einschub Äquivalenzrelation

Für $x \in A$ ist $[x] = \{y \in A \mid x\, R\, y\}$ die Äquivalenzklasse von x.

Manchmal schreibt man auch $[x]_R$ um klar zu machen, dass es sich um eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation R handelt.

Wenn aber klar ist, um welche Äquivalenzrelation R es geht, schreiben wir nur $[x]$.

Beachte:

- Es gilt stets $x \in [x]$.
- $x\, R\, y$ genau dann, wenn $[x] = [y]$.

Die Äquivalenzklassen von R bilden eine Partition von A, d.h. jedes Element von A gehört zu genau einer Äquivalenzklasse.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Jedem Wort $x \in \Sigma^*$ kann man in einem DFA einen eindeutigen Zustand $z = \widehat{\delta}(z_0, x)$ zuordnen. Daher kann die Definition der Erkennungsäquivalenz auf Wörter aus Σ^* und Sprachen (anstatt Automaten) ausgedehnt werden.

Definition (Myhill-Nerode-Äquivalenz)

Gegeben sei eine Sprache L und Wörter $x, y \in \Sigma^*$.
Wir definieren eine Äquivalenzrelation R_L mit $x \, R_L \, y$ genau dann wenn

$$\forall w \in \Sigma^* (xw \in L \iff yw \in L).$$

Für eine reguläre Sprache L besteht folgender Zusammenhang zwischen der Myhill-Nerode-Äquivalenz R_L und dem Begriff der Erkennungsäquivalenz:

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Lemma 2

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $L = T(M) \subseteq \Sigma^*$. Dann gilt für alle Wörter $x, y \in \Sigma^*$:

$$x \, R_L \, y \iff \widehat{\delta}(z_0, x) \text{ und } \widehat{\delta}(z_0, y) \text{ sind erkennungsäquivalent}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
x \, R_L \, y &\iff \forall w \in \Sigma^* (xw \in L \iff yw \in L) \\
&\iff \forall w \in \Sigma^* (xw \in T(M) \iff yw \in T(M)) \\
&\iff \forall w \in \Sigma^* (\widehat{\delta}(z_0, xw) \in E \iff \widehat{\delta}(z_0, yw) \in E) \\
&\iff \forall w \in \Sigma^* (\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(z_0, x), w) \in E \iff \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(z_0, y), w) \in E) \\
&\iff \widehat{\delta}(z_0, x) \text{ und } \widehat{\delta}(z_0, y) \text{ sind erkennungsäquivalent}
\end{aligned}$$

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Bemerkungen:

- Die Myhill-Nerode-Äquivalenz R_L ist für jede Sprache L definiert, nicht nur für reguläre Sprachen.
- Aus $x\, R_L\, y$ folgt: $x \in L \;\Leftrightarrow\; y \in L$.
  Für jede Äquivalenzklasse $[x]$ gilt somit: $[x] \subseteq L$ oder $[x] \cap L = \emptyset$

Häufiger Fehler: Oft wird gedacht, dass $x\, R_L\, y$ genau dann gilt, wenn $\forall w \in \Sigma^*(xw \in L \text{ und } yw \in L)$.

Das ist aber falsch!

Die Definition von R_L kann man auch wie folgt schreiben:
$x\, R_L\, y$ gilt genau dann, wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$

- $(xw \in L$ und $yw \in L)$ oder
- $(xw \notin L$ und $yw \notin L)$ gilt.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel 1 für Myhill-Nerode-Äquivalenz: Gegeben sei die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ gerade}\}.$$

Es gibt folgende Äquivalenzklassen für R_L:

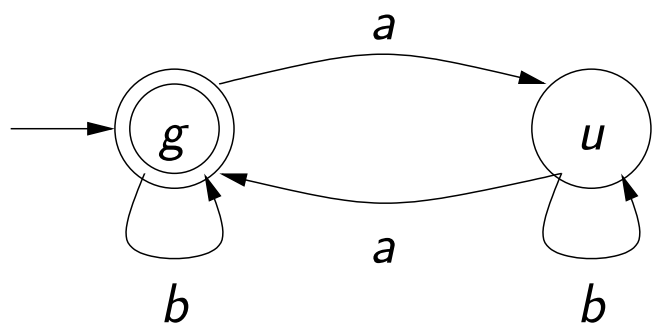
- $[\varepsilon] = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} = L$
  (Äquivalenzklasse von ε)
- $[a] = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ ungerade}\} = \{a, b\}^* \setminus L$
  (Äquivalenzklasse von a)

Die Wörter ε und aa sind äquivalent, denn:

- Wird an beide ein Wort mit gerade vielen a's angehängt, so bleiben sie beide in der Sprache.
- Wird an beide ein Wort mit ungerade vielen a's angehängt, so fallen sie beide aus der Sprache heraus.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

DFA für $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ gerade}\}$:



Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel 2 für Myhill-Nerode-Äquivalenz: Gegeben sei die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{ das Teilwort } abc \text{ kommt in } w \text{ nicht vor}\}.$$

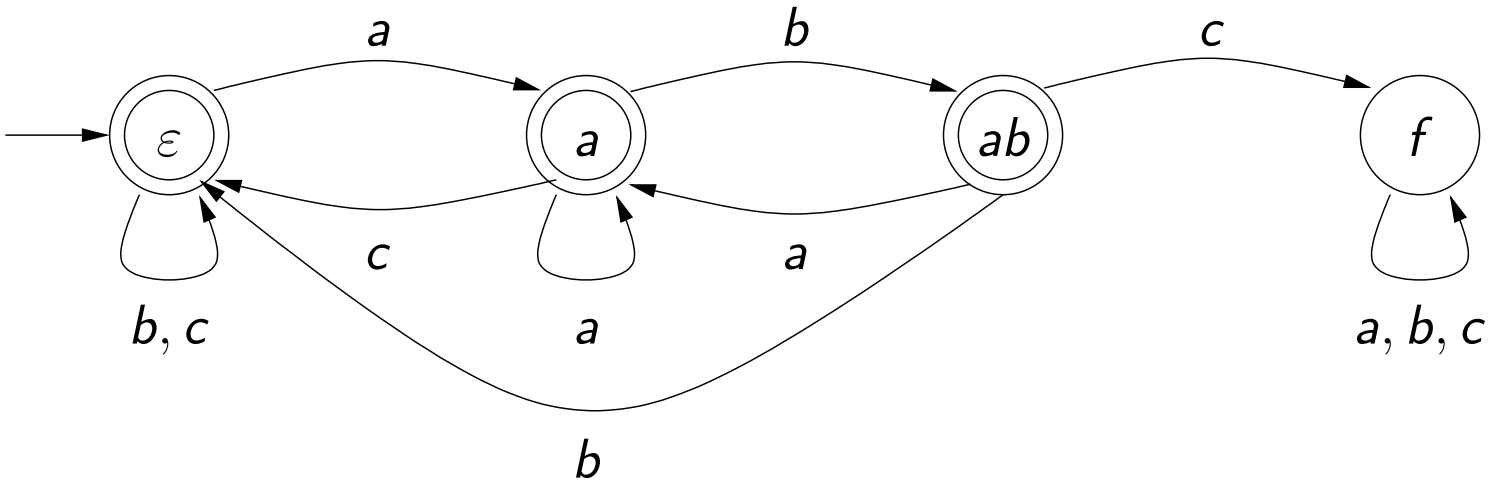
Es gibt folgende Äquivalenzklassen für R_L:

- $[\varepsilon] = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ endet nicht auf a oder ab und enthält abc nicht $\}$
- $[a] = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ endet auf a und enthält abc nicht $\}$
- $[ab] = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ endet auf ab und enthält abc nicht $\}$
- $[abc] = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \ w$ enthält $abc\}$ (Fangzustand)

Die Wörter a und ab sind nicht äquivalent, denn wird an beide ein c angehängt, so ist ac noch in L, abc ist es aber nicht.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

DFA für $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid$ das Teilwort abc kommt in w nicht vor$\}$:



Einschub Äquivalenzrelationen

Einschub zu Äquivalenzrelationen: Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge A.

Der Index index(R) von R ist die Anzahl der Äquivalenzklassen von R (kann unendlich sein): $\text{index}(R) = |\{[x] \mid x \in A\}| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Beispiel: Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definiert man für eine natürliche Zahl $k \geq 2$ die Äquivalenrelation $\equiv_k$ durch $a \equiv_k b$ (a kongruent b modulo k) genau dann, wenn ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = q \cdot k$ existiert (siehe Vorlesung DMI). Dann gilt $\text{index}(\equiv_k) = k$.

Einschub Äquivalenzrelationen

Beobachtung: Seien R und S Äquivalenzrelationen auf der gleichen Menge A. Wenn $R \subseteq S$ (d.h. aus $a\,R\,b$ folgt $a\,S\,b$) dann gilt $\text{index}(S) \leq \text{index}(R)$ (es gelte dabei $x \leq \infty$ für $x \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

Begründung: Sei $[A]_R$ ($[A]_S$) die Menge der Äquivalenzklassen von R (S).

Wir definieren eine Abbildung $f : [A]_R \to [A]_S$ durch die Vorschrift $f([a]_R) = [a]_S$.

Vorsicht: Ist hierdurch $f([a]_R)$ eindeutig definiert?

Der Wert $f([a]_R)$ darf nicht davon abhängen, welchen Repräsentanten wir für die Äquivalenzklasse $[a]_R$ wählen.

Genauer: Wir müssen $[a]_R = [b]_R \implies [a]_S = [b]_S$ zeigen:

$$[a]_R = [b]_R \iff a\,R\,b \implies a\,S\,b \iff [a]_S = [b]_S$$

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Natürlich ist f auch surjektiv: Jede Äquivalenzklasse $[a]_S$ wird getroffen: $f([a]_R) = [a]_S$.

Nun gilt für beliebige Mengen X und Y: $|X| \geq |Y|$ genau dann, wenn es eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt (dies ist in der Tat die Definition von $|X| \geq |Y|$).

Also gilt in unserer Situation: $\text{index}(R) = |[A]_R| \geq |[A]_S| = \text{index}(S)$.

Einer der berühmtesten Sätze aus der Automatentheorie ist die folgende Charakaterisierung der regulären Sprachen:

Satz von Myhill-Nerode

Sei L eine Sprache. L ist regulär $\iff \text{index}(R_L) < \infty$

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beweis:

$\Longrightarrow$: Sei L regulär.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $T(M) = L$.

Definiere eine Äquivalenzrelation R_M auf Σ^* wie folgt:

$$x \, R_M \, y \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\delta}(z_0, x) = \widehat{\delta}(z_0, y).$$

Beachte:

- R_M ist in der Tat eine Äquivalenzrelation.
- $\text{index}(R_M) \leq |Z|$

  Genauer: $\text{index}(R_M) =$ Anzahl der Zustände, die vom Anfangszustand erreicht werden können, d.h. $\text{index}(R_M) = |\{\widehat{\delta}(z_0, x) \mid x \in \Sigma^*\}|$.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Behauptung: $\forall x, y \in \Sigma^*(x \, R_M \, y \implies x \, R_L \, y)$, d.h. $R_M \subseteq R_L$.

Beweis der Behauptung:

$$
\begin{aligned}
x \, R_M \, y \quad &\iff \quad \widehat{\delta}(z_0, x) = \widehat{\delta}(z_0, y) \\
&\iff \quad \forall w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z_0, xw) = \widehat{\delta}(z_0, yw) \\
&\implies \quad \forall w \in \Sigma^* : xw \in T(M) = L \Leftrightarrow yw \in T(M) = L \\
&\iff \quad x \, R_L \, y
\end{aligned}
$$

Die Bemerkung auf Folie 149 zeigt $\text{index}(R_L) \leq \text{index}(R_M) \leq |Z| < \infty$.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

$\Longleftarrow$: Sei $\text{index}(R_L) < \infty$.

Sei $[x_1], \ldots, [x_n]$ eine Auflistung aller Äquivalenzklassen von R_L.

Beachte:

- $\Sigma^* = [x_1] \cup \cdots \cup [x_n]$.
- Wenn $[x] = [y]$, dann $[xa] = [ya]$ für alle $a \in \Sigma$:

$$
\begin{aligned}
[x] = [y] &\iff x \, R_L \, y \\
&\iff \forall w \in \Sigma^* \, (xw \in L \Leftrightarrow yw \in L) \\
&\Longrightarrow \forall w \in \Sigma^+ \, (xw \in L \Leftrightarrow yw \in L) \\
&\iff \forall a \in \Sigma \, \forall w \in \Sigma^* (xaw \in L \Leftrightarrow yaw \in L) \\
&\iff \forall a \in \Sigma \, (xa \, R_L \, ya) \\
&\iff \forall a \in \Sigma \, [xa] = [ya]
\end{aligned}
$$

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Wir definieren nun den DFA (den sogenannten Äquivalenzklassenautomaten für L)

$$M_L = (\{[x_1], \ldots, [x_n]\}, \Sigma, \delta_L, [\varepsilon], \{[w] \mid w \in L\}),$$

wobei $\delta_L([x_i], a) = [x_i a]$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $a \in \Sigma$.

Beachte:

- Die Menge der Endzustände $\{[w] \mid w \in L\}$ ist eine Menge von Äquivalenzklassen und daher eine Teilmenge der Zustandsmenge $\{[x_1], \ldots, [x_n]\}$ (der Menge aller Äquivalenzklassen).
- Die Überführungsfunktion δ_L ist wohl-definiert auf Grund der Bemerkung auf der vorherigen Folie.
- Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $\widehat{\delta}_L([\varepsilon], x) = [x]$.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Behauptung: $T(M_L) = L$ (dies zeigt dann, dass L regulär ist).

Beweis der Behauptung:

$$
\begin{aligned}
x \in T(M_L) &\iff \widehat{\delta}_L([\varepsilon], x) \in \{[w] \mid w \in L\} \\
&\iff [x] \in \{[w] \mid w \in L\} \\
&\iff \exists w \in L : [x] = [w] \\
&\iff \exists w \in L : x \, R_L \, w \\
&\iff x \in L
\end{aligned}
$$

□

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Mit dem Satz von Myhill-Nerode kann man auch zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist.

Dazu muss man nur unendlich viele Wörter aus Σ^* finden, die in verschiedenen R_L-Äquivalenzklassen liegen.

Beispiel 3 für Myhill-Nerode-Äquivalenz:

Sei $L = \{a^k b^k \mid k \geq 0\}$

Betrachte die Wörter a, aa, aaa, $\ldots$, a^i, $\ldots$

Es gilt: $\neg(a^i \, R_L \, a^j)$ für $i \neq j$, denn $a^i b^i \in L$ und $a^j b^i \notin L$.

Also hat R_L unendlich viele Äquivalenzklassen und L ist nicht regulär.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Sei M ein DFA mit n Zuständen. Wir sagen, dass M ein minimaler DFA für die reguläre Sprache L ist, falls

- $T(M) = L$ und
- kein DFA M' mit $T(M') = L$ und weniger als n Zuständen existiert.

Betrachten wir nochmals den auf Folie 154 konstruierten DFA M_L.

Satz

Sei L regulär.

1. M_L ist ein minimaler DFA für L.
2. Sei M ein DFA mit $T(M) = L$ und in dem alle Zustände vom Anfangszustand aus erreicht werden können. Dann gilt:
   M ist minimaler DFA für $L \iff R_L = R_M$.
3. Falls M ein minimaler DFA für L ist, so kann man M aus M_L durch Umbenennung der Zustände bilden.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beweis:

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta_M, z_0, E)$ ein beliebiger DFA mit $T(M) = L$.

Sei $M_L = (\{[x_1], \ldots, [x_n]\}, \Sigma, \delta_L, [\varepsilon], \{[w] \mid w \in L\})$ der Äquivalenzklassenautomat.

Für (1) müssen wir zeigen, dass M_L höchstens so viele Zustände wie M hat.

Auf Folie 152 haben wir gesehen: $\text{index}(R_L) \leq |Z|$.

Ausserdem: Anzahl der Zustände von $M_L = \text{index}(R_L)$.

Dies zeigt (1).

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Angenommen in M sind alle Zustände vom Anfangszustand z_0 aus erreichbar, aber M ist dennoch nicht minimal für L.

Dann gilt $\text{index}(R_L) < |Z| = \text{index}(R_M)$
(siehe letzte Bemerkung auf Folie 151).

Also gilt $R_L \neq R_M$.

Ist andererseits M minimal für L so gilt
$|Z| =$ Anzahl der Zustände von $M_L = \text{index}(R_L)$.

Wegen $|Z| = \text{index}(R_L) \leq \text{index}(R_M) \leq |Z|$ (siehe Folie 152 unten) gilt $\text{index}(R_L) = \text{index}(R_M) < \infty$.

Mit $R_M \subseteq R_L$ (siehe Folie 152 oben) folgt $R_M = R_L$.

Dies zeigt (2).

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Für (3) nehmen wir wieder an, dass M minimal für L ist.

Also gilt $R_M = R_L = R_{M_L}$ und $[x_1], \ldots, [x_n]$ sind genau die Äquivalenzklassen von $R_M = R_L$.

Definiere $f : Z \to \{[x_1], \ldots, [x_n]\}$ durch $f(z) = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}_M(z_0, w) = z\}$.

Dann ist f eine Bijektion.

Außerdem gilt:

- $f(z_0) = [\varepsilon]$ ist der Anfangszustand von M_L.
- Sei $z \in Z$ und sei $w \in \Sigma^*$ so, dass $\widehat{\delta}_M(z_0, w) = z$ und daher $f(z) = [w]$. Dann gilt:

$$f(\delta_M(z, a)) = f(\widehat{\delta}_M(z_0, wa)) = [wa] = \delta_L([w], a) = \delta_L(f(z), a)$$

$$z \in E \iff w \in L \iff f(z) = [w] \text{ ist Endzustand von } M_L$$

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Dies bedeutet, dass wir M_L aus M bilden können, indem jeder Zustand $z \in Z$ in $f(z)$ umbenannt wird.

Oder umgekehrt: M entsteht aus dem Äquivalenzklassenautomat M_L indem jeder Zustand $[x_i]$ in $f^{-1}([x_i])$ umbenannt wird. □

Bemerkung: Es gibt also für eine reguläre Sprache bis auf Umbenennung von Zuständen genau einen minimalen DFA.

Der minimale DFA M_L für eine reguläre Sprache ist sozusagen ein eindeutiger Repräsentant für L.

Nächstes Ziel: Konstruiere den minimalen Automaten M_L aus einem nicht unbedingt minimalen DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $T(M) = L$.

Zunächst können wir voraussetzen, dass jeder Zustand $z \in Z$ vom Anfangszustand z_0 erreicht werden kann, d.h. $\exists x \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z_0, x) = z$.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Ist ein Zustand z vom Anfangszustand nicht erreichbar, so können wir z aus dem DFA entfernen ohne die akzeptierte Sprache zu verändern.
Beachte: Gibt es eine Kante von z' nach z, so ist auch z' nicht von z_0 aus erreichbar.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& M \text{ nicht minimal für } L \\
\overset{\text{Folie 157}}{\Longleftrightarrow} \quad & R_M \subsetneq R_L \text{ (d.h. } R_M \subseteq R_L \text{ und } R_M \neq R_L\text{)} \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists x, y \in \Sigma^* : (x, y) \in R_L \ \wedge \ (x, y) \notin R_M \\
\overset{\text{Folie 142}}{\Longleftrightarrow} \quad & \exists x, y \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z_0, x), \widehat{\delta}(z_0, y) \text{ sind erkennungsäquivalent} \\
& \qquad \wedge \widehat{\delta}(z_0, x) \neq \widehat{\delta}(z_0, y) \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists z_1, z_2 \in Z : z_1, z_2 \text{ sind erkennungsäquivalent und } z_1 \neq z_2
\end{aligned}
$$

Für die letzte Äquivalenz verwenden wir, dass für jeden Zustand $z \in Z$ ein $x \in \Sigma^*$ mit $\widehat{\delta}(z_0, x) = z$ existiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Lösung: wir verschmelzen in M alle erkennungsäquivalenten Zustände.

Um herauszufinden, welche Zustände erkennungsäquivalent sind, markieren wir alle Zustandspaare $\{z, z'\}$, die nicht erkennungsäquivalent sind.

Wir schreiben hier Paare als 2-elementige Teilmengen $\{z, z'\}$, da die Reihenfolge egal ist: $\{z, z'\} = \{z', z\}$.

Zunächst sind sicherlich alle Paare $\{z, z'\}$ mit $z \in E$ und $z' \notin E$ nicht erkennungsäquivalent, diese Paare markieren wir zu Beginn.

Angenommen für ein Paar $\{z, z'\}$ existiert ein $a \in \Sigma$, so dass $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ nicht erkennungsäquivalent sind.
Dann sind auch $\{z, z'\}$ nicht erkennungsäquivalent.

Diese Beobachtung erlaubt uns, weitere Paare als nicht erkennungsäquivalent zu markieren.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

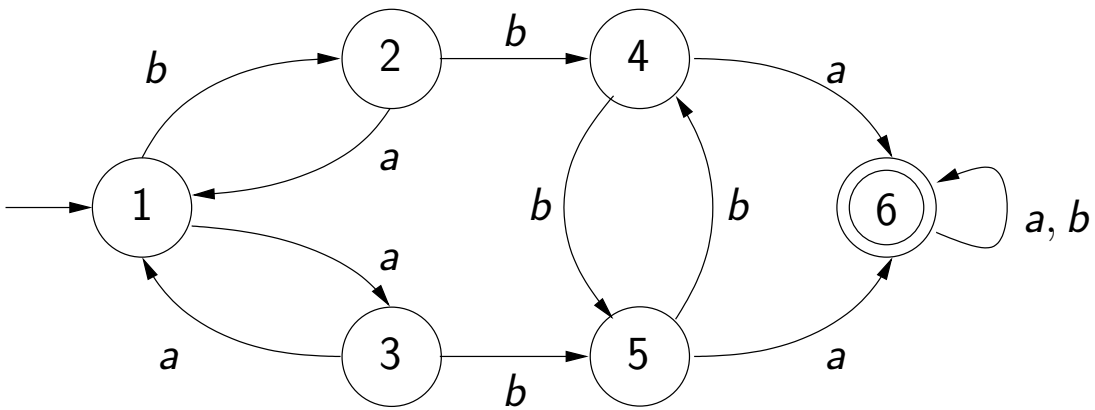
Algorithmus Minimalautomat

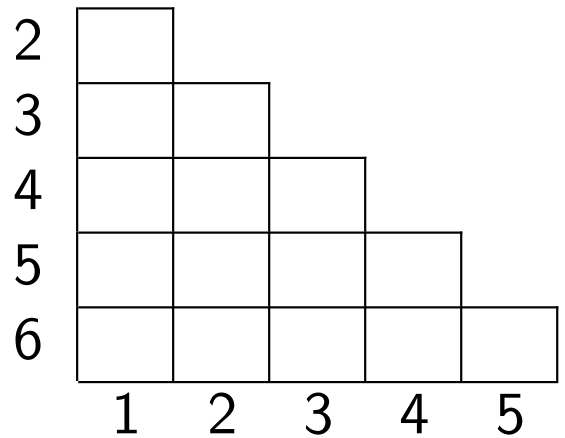
Eingabe: DFA M (Zustände, die vom Startzustand aus nicht erreichbar sind, sind bereits entfernt.)
Ausgabe: Mengen von erkennungsäquivalenten Zuständen

1. Stelle eine Tabelle aller Zustandspaare $\{z, z'\}$ mit $z \neq z'$ auf.
2. Markiere alle Paare $\{z, z'\}$ mit $z \in E$ und $z' \notin E$.
3. Für jedes noch unmarkierte Paar $\{z, z'\}$ und jedes $a \in \Sigma$ teste, ob $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ bereits markiert ist. Wenn ja: markiere auch $\{z, z'\}$.
4. Wiederhole den vorherigen Schritt, bis sich keine Änderung in der Tabelle mehr ergibt.
5. Für alle jetzt noch unmarkierten Paare $\{z, z'\}$ gilt: z und z' sind erkennungsäquivalent.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

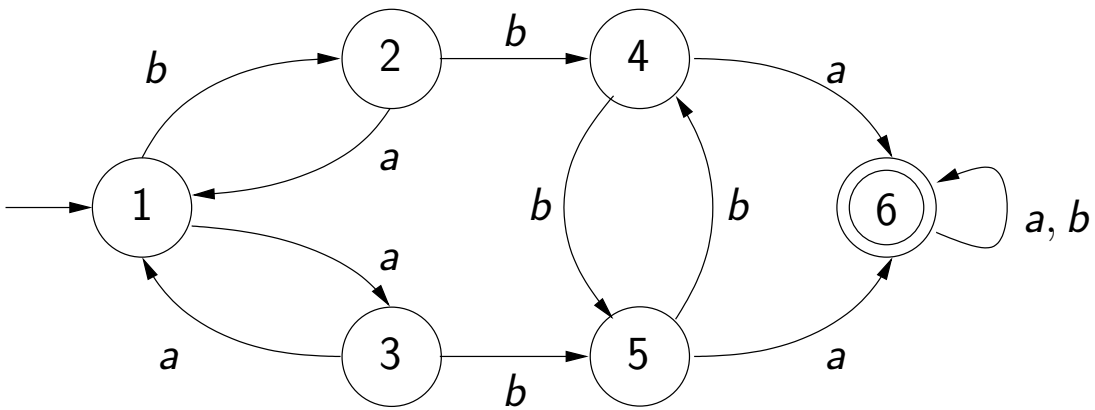




Erstelle eine Tabelle aller Zustandspaare.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

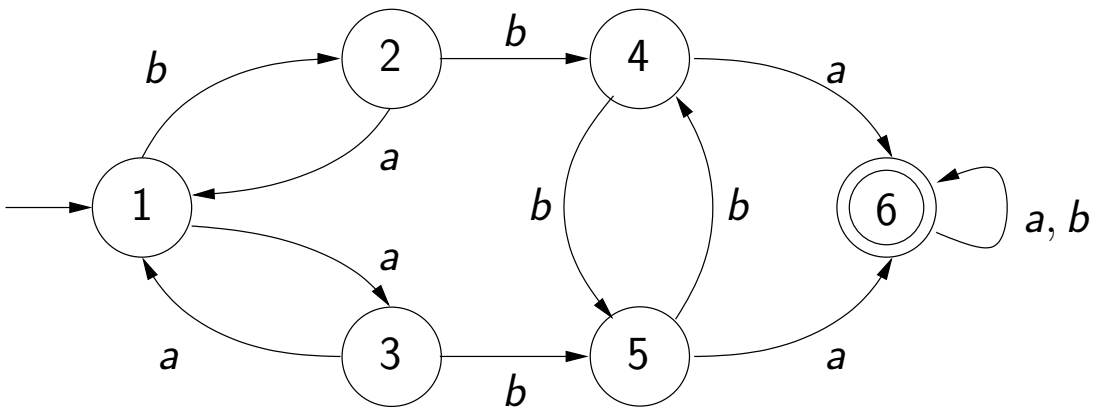


2					
3					
4					
5					
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(1) Markiere Paare von Endzuständen und Nicht-Endzuständen.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

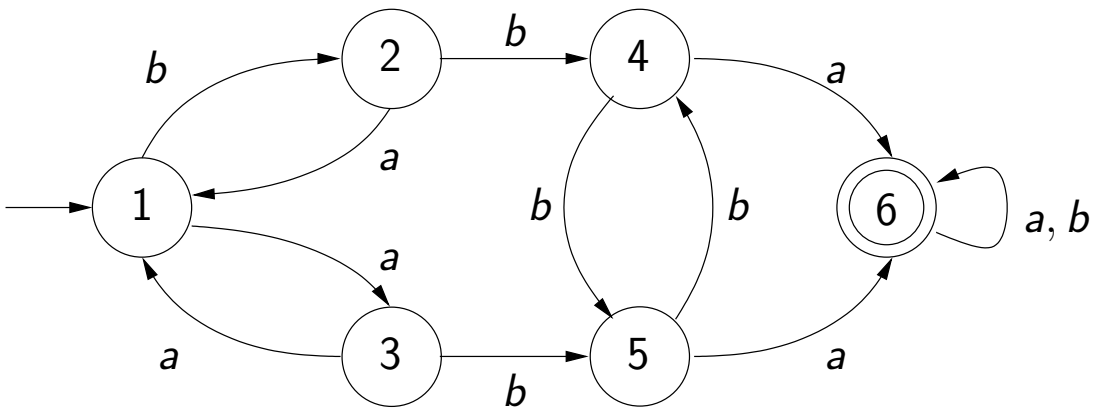


2					
3					
4		2			
5					
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(2) Markiere $\{2, 4\}$ wegen $\delta(2, a) = 1$, $\delta(4, a) = 6$ und $\{1, 6\}$ markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

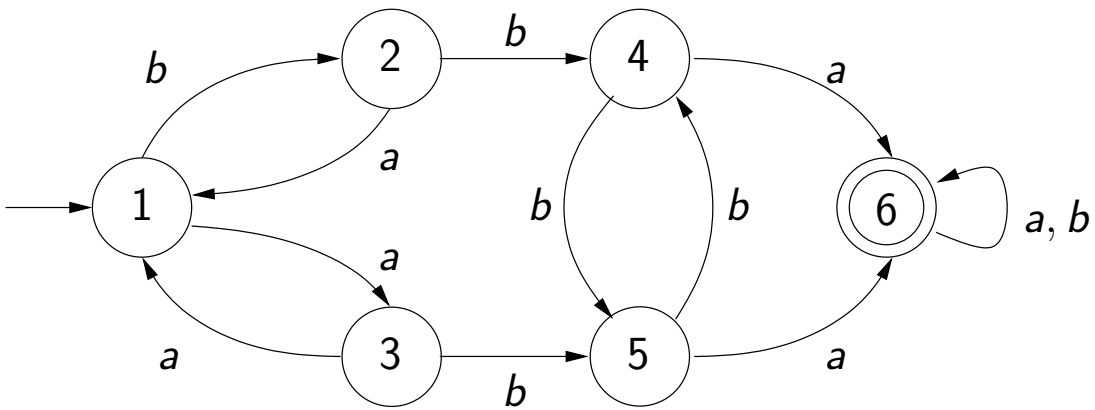


2					
3					
4		2			
5			3		
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(3) Markiere $\{3, 5\}$ wegen $\delta(3, a) = 1$, $\delta(5, a) = 6$ und $\{1, 6\}$ markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

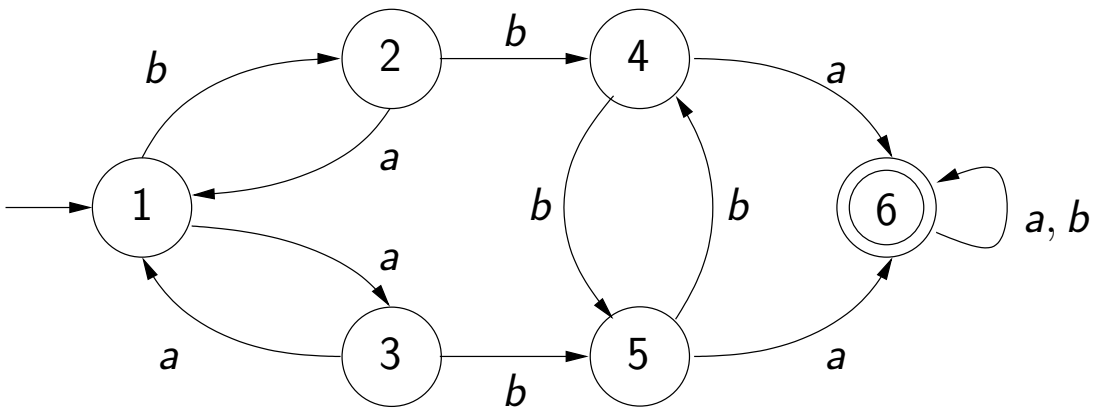


2					
3					
4		2			
5		4	3		
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(4) Markiere $\{2, 5\}$ wegen $\delta(2, a) = 1$, $\delta(5, a) = 6$ und $\{1, 6\}$ markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

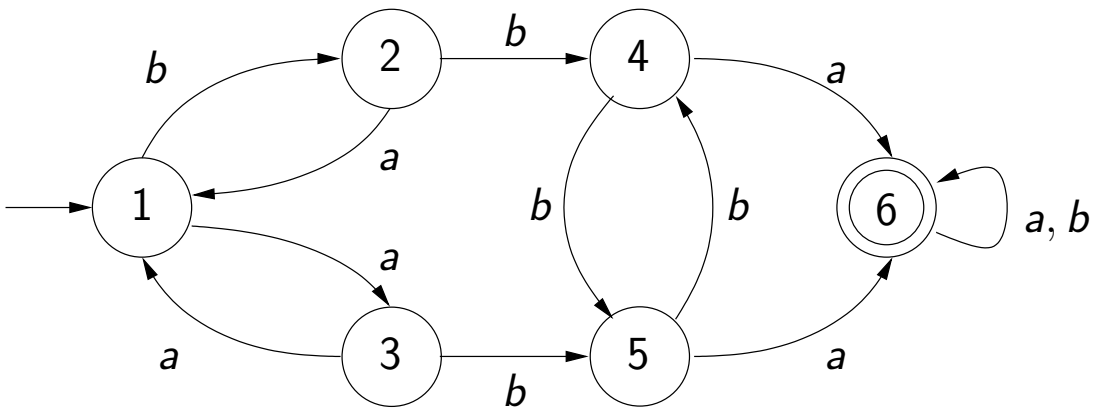


2					
3					
4		2	5		
5		4	3		
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(5) Markiere $\{3, 4\}$ wegen $\delta(3, a) = 1$, $\delta(4, a) = 6$ und $\{1, 6\}$ markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

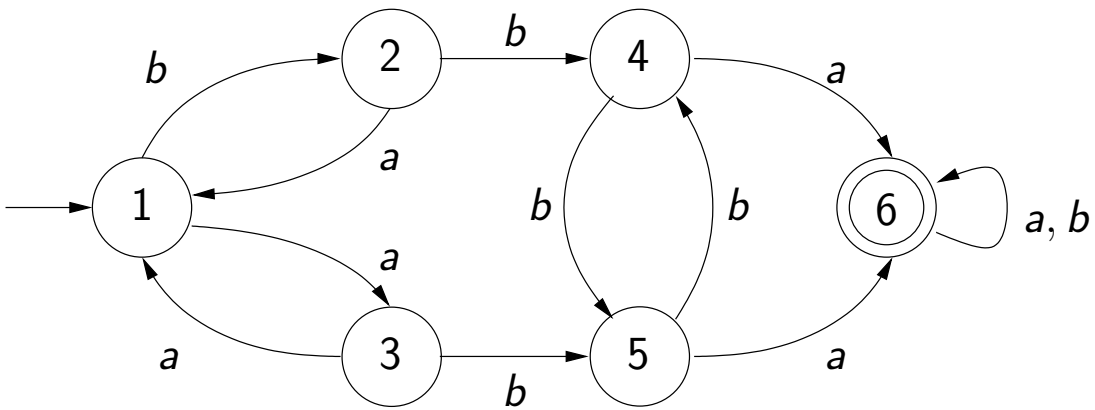


2					
3					
4		2	5		
5	6	4	3		
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(6) Markiere $\{1, 5\}$ wegen $\delta(1, a) = 3$, $\delta(5, a) = 6$ und $\{3, 6\}$ markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

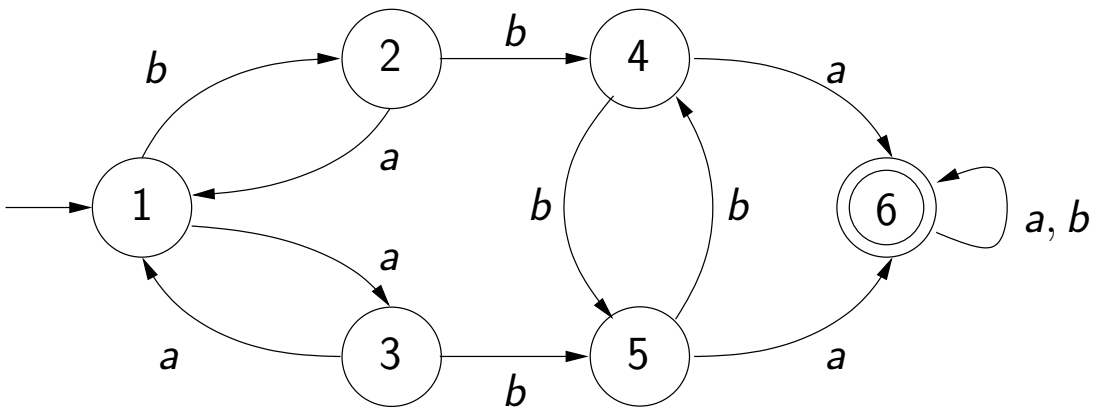


2					
3					
4	7	2	5		
5	6	4	3		
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(7) Markiere $\{1, 4\}$ wegen $\delta(1, a) = 3$, $\delta(4, a) = 6$ und $\{3, 6\}$ markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

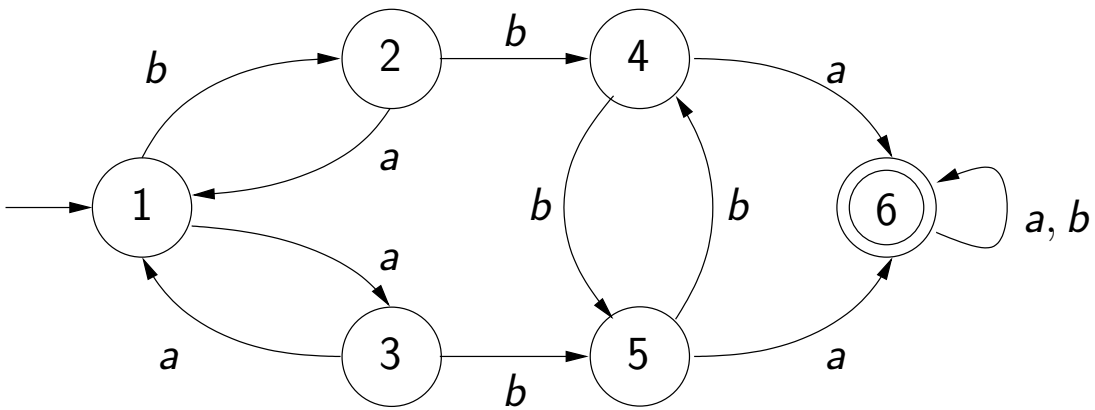


2					
3	8				
4	7	2	5		
5	6	4	3		
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(8) Markiere $\{1, 3\}$ wegen $\delta(1, b) = 2$, $\delta(3, b) = 5$ und $\{2, 5\}$ markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

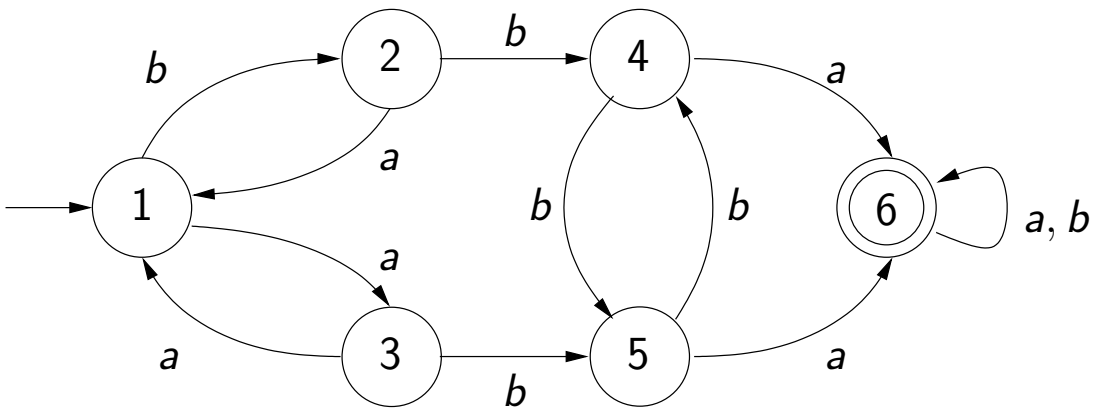


2	9				
3	8				
4	7	2	5		
5	6	4	3		
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

(9) Markiere $\{1, 2\}$ wegen $\delta(1, b) = 2$, $\delta(2, b) = 4$ und $\{2, 4\}$ markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Beispiel für Durchführung des Minimierungsalgorithmus:



2	9				
3	8				
4	7	2	5		
5	6	4	3		
6	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5

Die verbleibenden Zustandspaare $\{2,3\}$ und $\{4,5\}$ können nicht mehr markiert werden. $\rightsquigarrow$ Sie sind erkennungsäquivalent.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Satz (Korrektheit des Minimierungsalgorithmus)

Für einen gegebenen DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ markiert der Minimierungsalgorithmus ein Paar $\{z, z'\}$ $(z, z' \in Z,\ z \neq z')$ genau dann, wenn z und z' nicht erkennungsäquivalent sind.

Beweis:

(A) Falls $\{z, z'\}$ markiert wird, so sind z und z' nicht erkennungsäquivalent.

Beweis durch Induktion über den Zeitpunkt, zu dem $\{z, z'\}$ markiert wird.

Induktionsanfang: $\{z, z'\}$ wird zu Beginn markiert, weil $z \in E$ und $z' \notin E$.

Dann sind z und z' nicht erkennungsäquivalent.

Induktionsschluss: $\{z, z'\}$ wird irgendwann markiert, weil ein $a \in \Sigma$ existiert, so dass $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ zu einem früheren Zeitpunkt markiert wurde.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Nach Induktionshypothese sind $\delta(z, a)$ und $\delta(z', a)$ nicht erkennungsäquivalent.

Dann sind auch z und z' nicht erkennungsäquivalent.

(B) Wenn z und z' nicht erkennungsäquivalent sind, dann wir $\{z, z'\}$ irgendwann markiert.

Seien z und z' nicht erkennungsäquivalent.

Sei $\lambda(z, z')$ die Länge eines kürzesten Wortes w mit $\widehat{\delta}(z, w) \in E$ und $\widehat{\delta}(z', w) \notin E$ (oder umgekehrt).

Wir zeigen durch Induktion über $\lambda(z, z')$, dass $\{z, z'\}$ markiert wird.

Induktionsanfang: $\lambda(z, z') = 0$

Dann gilt $z \in E$ und $z' \notin E$

Also wird $\{z, z'\}$ wird zu Beginn markiert.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Induktionsschluss: Sei $\lambda(z, z') > 0$.

Dann gibt es ein Wort au ($a \in \Sigma$ und $u \in \Sigma^*$) mit $|au| = \lambda(z, z')$, so dass

$$\widehat{\delta}(z, au) = \widehat{\delta}(\delta(z, a), u) \in E, \quad \widehat{\delta}(z', au) = \widehat{\delta}(\delta(z', a), u) \notin E$$

(oder umgekehrt).

Dann sind auch $\delta(z, a)$ und $\delta(z', a)$ nicht erkennungsäquivalent und $\lambda(\delta(z, a), \delta(z', a)) \leq |u| < \lambda(z, z')$.

Nach Induktionshypothese wird $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ irgendwann markiert.

Also wird auch $\{z, z'\}$ irgendwann markiert. □

Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Hinweise für die Durchführung des Minimierungsalgorithmus:

- Die Tabelle möglichst so aufstellen, dass jedes Paar nur genau einmal vorkommt! Also bei Zustandsmenge $\{1, \ldots, n\}$:
  $2, \ldots, n$ vertikal und $1, \ldots, n-1$ horizontal notieren.
- Bitte angeben, welche Zustände in welcher Reihenfolge und warum markiert wurden!

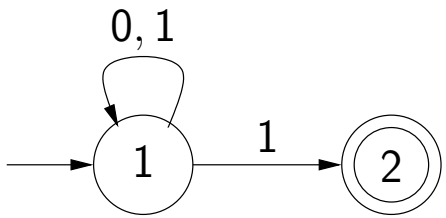
  Im Buch von Schöning werden immer nur Sternchen ($*$) verwendet, aber daraus werden bei der Korrektur die Reihenfolge und die Gründe für die Markierung nicht ersichtlich.

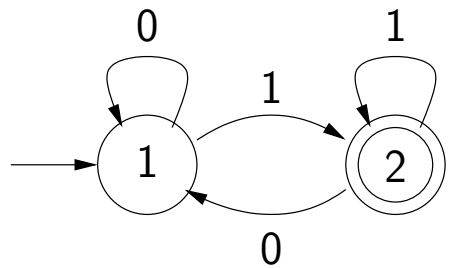
Äquivalenzrelationen und Minimalautomat

Für nicht-deterministische Automaten kann man folgende Aussagen treffen:

- Es gibt nicht *den* minimalen NFA, sondern es kann mehrere geben.

  Folgende zwei minimale NFAs erkennen $L = ((0|1)^*1)$ und haben zwei Zustände (mit nur einem Zustand kann L nicht erkannt werden).





- Gegeben ein DFA M. Dann hat ein minimaler NFA, der $T(M)$ erkennt, immer höchstens so viel Zustände wie M, denn M selbst ist schon ein NFA.

  Außerdem: der minimale NFA kann exponentiell kleiner sein als der minimale DFA.
  Siehe $L_k = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x| \geq k, \text{das } k\text{-letzte Zeichen von } x \text{ ist } 0\}$.

Entscheidbarkeit

Wir diskutieren nun, ob es Verfahren gibt, um die folgenden Fragestellungen bzw. Probleme für reguläre Sprachen zu entscheiden. Dabei nehmen wir an, dass reguläre Sprachen als DFAs, NFAs, Grammatiken oder reguläre Ausdrücke gegeben sind.

Probleme

- Wortproblem: Gilt $w \in L$ für eine gegebene reguläre Sprache L und $w \in \Sigma^*$?
- Leerheitsproblem: Gilt $L = \emptyset$ für eine gegebene reguläre Sprache L?
- Endlichkeitsproblem: Ist eine gegebene reguläre Sprache L endlich?
- Schnittproblem: Gilt $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ für gegebene reguläre L_1, L_2?
- Inklusionsproblem: Gilt $L_1 \subseteq L_2$ für gegebene reguläre L_1, L_2?
- Äquivalenzproblem: Gilt $L_1 = L_2$ für gegebene reguläre L_1, L_2?

Entscheidbarkeit

Wortproblem:

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache, gegeben durch einen DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $T(M) = L$, und sei $w \in \Sigma^*$.

Frage: $w \in L$?

Lösung:

Sei $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$.

Verfolge die Zustandsübergänge von M, die durch die Symbole $a_1, \ldots, a_n$ vorgegeben sind:

$z := z_0$
for $i := 1$ **to** n **do**
  $z := \delta(z, a_i)$
endfor
if $z \in E$ **then return**(JA) **else return**(NEIN)

Entscheidbarkeit

Leerheitsproblem:

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA.

Frage: $T(M) \neq \emptyset$?

Lösung:

Sei $G = (Z, \rightarrow)$ der gerichtete Graph mit

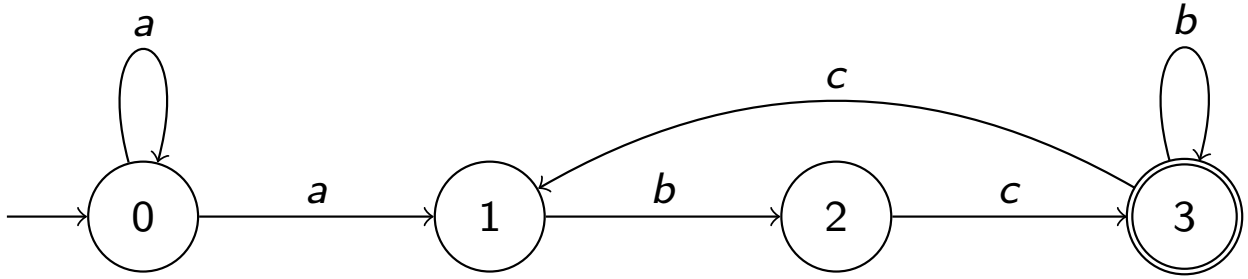
$$z \rightarrow z' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a \in \Sigma : z' \in \delta(z, a).$$

Dann gilt: $T(M) \neq \emptyset$, genau dann, wenn es in dem Graphen G einen (evtl. leeren) Pfad von einem Knoten aus S zu einem Knoten aus E gibt.

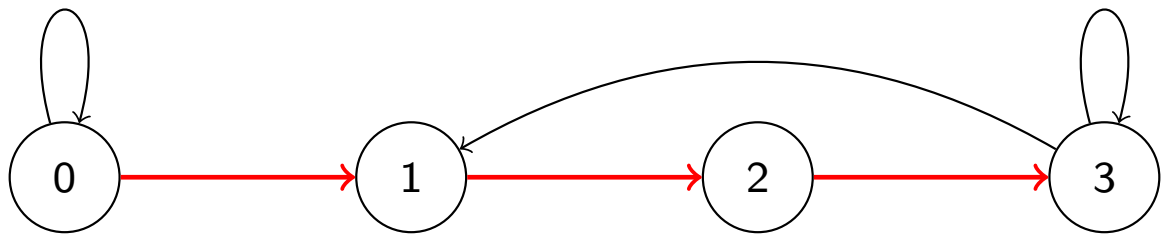
Dies kann z. B. mit Tiefen- oder Breitensuche (siehe Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*) entschieden werden.

Entscheidbarkeit

Beispiel 1: Betrachte folgenden Automaten M.

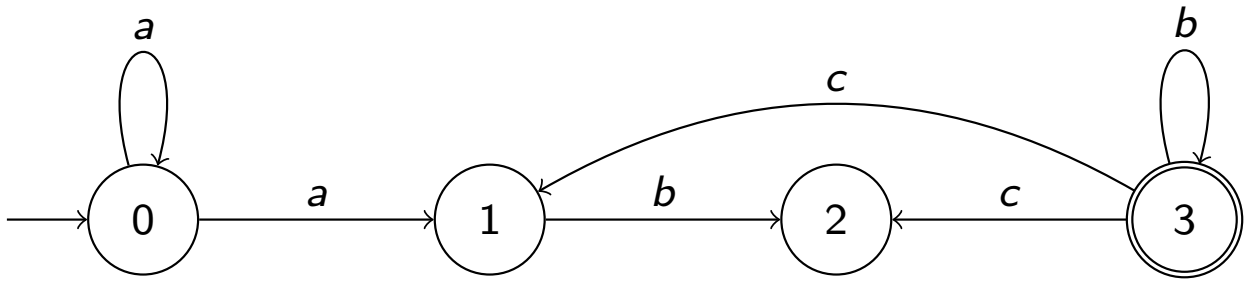


Der Automat erkennt eine nicht-leere Sprache, wie der folgende Pfad in dem Graphen G zeigt:



Entscheidbarkeit

Beispiel 2: Der folgende Automat akzeptiert hingegen die leere Sprache, das es keinen Pfad in dem Graphen G von 0 nach 3 gibt:



Entscheidbarkeit

Endlichkeitsproblem:

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA.

Frage: Ist $T(M)$ endlich?

Lösung:

Sei G wie auf der vorherigen Folie definiert.

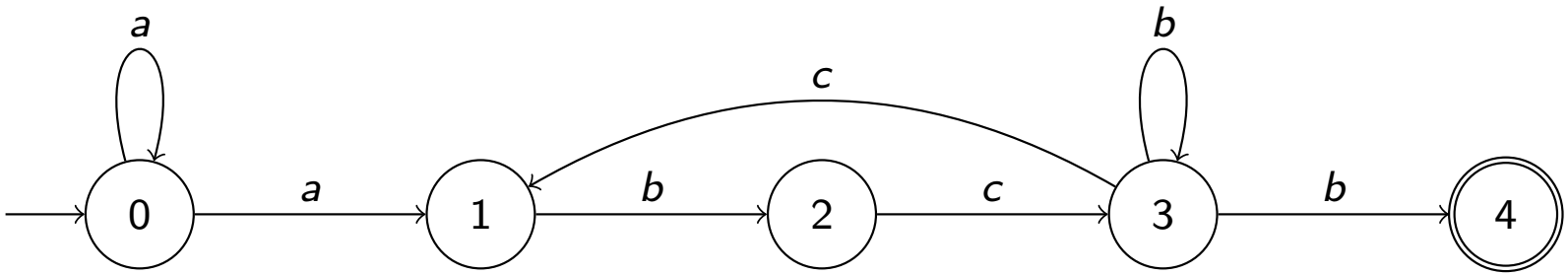
Dann gilt: $T(M)$ ist unendlich, genau dann, wenn es Zustände $z_0 \in S$, $z \in Z$ und $z_1 \in E$ gibt mit:

- $z_0 \to^* z$ (z ist vom Anfangszustand z_0 aus erreichbar),
- $z \to^+ z$ (von z gibt es einen Pfad zurück nach z mit mindestens einer Kante, d.h. z liegt auf einem Kreis),
- $z \to^* z_1$ (von z erreicht man den Endzustand z_1).

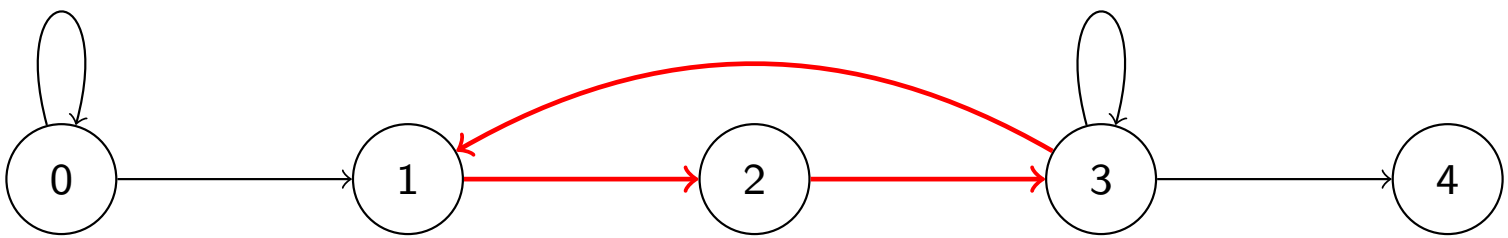
Dies kann wieder durch Tiefen- oder Breitensuche entschieden werden.

Entscheidbarkeit

Beispiel: Betrachte wieder den folgenden Automaten M.



Der Automat erkennt eine unendliche Sprache: Der rote Kreis ist von 0 aus erreichbar und von dem roten Kreis kommt man zum Knoten 4 (dem Endzustand des NFA).



Entscheidbarkeit

Schnittproblem:

Seien M_1 und M_2 NFAs.

Frage: Gilt $T(M_1) \cap T(M_2) = \emptyset$?

Lösung:

Konstruiere aus M_1 und M_2 den Produktautomaten M ($\rightsquigarrow \; T(M) = T(M_1) \cap T(M_2)$), siehe Folie 124.

Teste, ob $T(M) = \emptyset$ gilt.

Entscheidbarkeit

Inklusionsproblem:

Seien M_1 und M_2 NFAs.

Frage: Gilt $T(M_1) \subseteq T(M_2)$?

Lösung: Aus M_1 und M_2 können wir einen NFA M mit $T(M) = \overline{T(M_2)} \cap T(M_1)$ konstruieren.

Es gilt: $T(M_1) \subseteq T(M_2)$ genau dann, wenn $T(M) = \emptyset$.

Entscheidbarkeit

Äquivalenzproblem:

Seien M_1 und M_2 NFAs.

Frage: Gilt $T(M_1) = T(M_2)$?

Lösung 1:

Es gilt: $T(M_1) = T(M_2)$ genau dann, wenn $T(M_1) \subseteq T(M_2)$ und $T(M_2) \subseteq T(M_1)$.

Lösung 2:

Bestimme zu M_i ($i \in \{1, 2\}$) einen äquivalenten minimalen DFA N_i.

Dann gilt: $T(M_1) = T(M_2) \Leftrightarrow T(N_1) = T(N_2) \Leftrightarrow N_1$ und N_2 sind isomorph (d.h. können durch Umbenennung der Zustände ineinander überführt werden).

Entscheidbarkeit

Effizienzbetrachtungen:

Je nachdem, in welcher Darstellung eine reguläre Sprache L gegeben ist, kann die Laufzeit der oben beschriebenen Verfahren sehr unterschiedlich ausfallen.

Beispiel: Äquivalenzproblem $L_1 = L_2$:

- L_1, L_2 gegeben als DFAs

  $\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(n^2)$

- L_1, L_2 gegeben als Grammatiken, reguläre Ausdrücke oder NFAs

  $\rightsquigarrow$ Komplexität NP-hart

  Das bedeutet unter anderem: Es ist nicht bekannt, ob dieses Problem in polynomieller Zeit lösbar ist.

  Mehr zur Komplexitätsklasse NP und verwandten Fragestellungen $\rightsquigarrow$ Master Vorlesung Komplexitätstheorie

Kontextfreie Sprachen

Wir behandeln nun die kontextfreien oder Typ-2-Sprachen.

Wiederholung: Produktionen kontextfreier Grammatiken

Bei kontextfreien Grammatiken haben alle Produktionen die Form $A \to w$, wobei $A \in V$ (d.h., A ist eine Variable) und $w \in (V \cup \Sigma)^+$.

Ausnahme (ε-Sonderregelung): $S \to \varepsilon$, dann darf das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite einer Produktion vorkommen.

Betrachtete Beispielgrammatiken:

- Grammatik, die korrekt geklammerte arithmetische Ausdrücke erzeugt
- Grammatik, die Sätze der natürlichen Sprache erzeugt

Ein weiteres Beispiel: die Sprache $L = \{a^k b^k \mid k \geq 0\}$ ist kontextfrei.

Produktionen: $S \to \varepsilon \mid T$, $T \to ab \mid aTb$

Kontextfreie Sprachen

Anwendungen kontextfreier Sprachen

Hauptanwendung: Beschreibung der Syntax von Programmiersprachen

Viele der hier besprochenen Techniken sind daher interessant für den Einsatz im Compilerbau.

Bemerkung: eine Grammatik, die eine natürliche Sprache beschreibt, kann trotz mancher kontextfreier Bestandteile nicht kontextfrei sein, da bei Sprache viele subtile Kontextabhängigkeiten berücksichtigt werden müssen.

Bisher ist es auch noch niemandem gelungen eine vollständige Grammatik aller korrekten natürlichsprachigen Sätze zu bilden.
Frage: Was ist überhaupt ein korrekter Satz?

Kontextfreie Sprachen

Inhalt des Abschnitts "Kontextfreie Sprachen"

- Normalformen – wichtig für die Anwendung bestimmter Verfahren/Techniken ist es, eine Grammatik in eine bestimmte Normalform zu bringen.
- Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen
- Abschlusseigenschaften – die kontextfreien Sprachen verhalten sich hier nicht ganz so gutartig wie die regulären Sprachen.
- Wortproblem – und der Algorithmus, um das Wortproblem zu lösen (CYK-Algorithmus)
- Kellerautomaten – das Automatenmodell zu kontextfreien Sprachen

Normalformen

Wir beschäftigen uns zunächst noch einmal mit der "ε-Sonderregelung":

Die Definition für kontextfreie Grammatiken (mit ε-Sonderregelung) fordert, dass S auf keiner rechten Seite auftauchen darf, wenn $S \to \varepsilon$ als Produktion vorkommt. Außerdem dürfen keine weiteren Produktionen der Form $A \to \varepsilon$ auftauchen.

Was passiert, wenn man diese Bedingungen aufhebt und beliebige Regeln der Form $A \to \varepsilon$ erlaubt? Kann es dann passieren, dass man eine nicht-kontextfreie Sprache erzeugt?

Antwort: nein

Normalformen

Satz (ε-freie Grammatiken)

Gegeben sei eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, deren Produktionen alle von der Form $A \to w$ für $A \in V$, $w \in (V \cup \Sigma)^*$ sind.

Dann gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$, so dass:

- alle Produktionen in P' die Form $A \to w$ mit $A \in V$, $w \in (V \cup \Sigma)^+$ haben, und
- $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ gilt.

Man darf also ε-Produktionen beliebig verwenden. Sie verändern nichts an der Ausdrucksmächtigkeit kontextfreier Grammatiken.

Beweis:

Sei $V_\varepsilon = \{A \in V \mid A \Rightarrow_G^* \varepsilon\}$ die Menge aller Variablen, aus denen das leere Wort abgeleitet werden kann.

Normalformen

Die Menge V_ε kann mittels des folgenden Algorithmus berechnet werden:

$U := \emptyset$
$V_\varepsilon := \{A \in V \mid (A \to \varepsilon) \in P\}$
while $U \neq V_\varepsilon$ **do**
    $U := V_\varepsilon$
    $V_\varepsilon := U \cup \{A \in V \mid \exists w \in U^+ : (A \to w) \in P\}$
endwhile

Dann gilt:

- Wenn eine Variable A irgendwann in die Menge V_ε aufgenommen wird, gilt $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

  Dies zeigt man leicht durch eine Induktion über dem Zeitpunkt t, zu dem A in die Menge V_ε aufgenommen wird.

Normalformen

- Wenn $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$, dann wird irgendwann A in die Menge V_ε aufgenommen.

  Dies zeigt man durch eine Induktion über die Länge ℓ der Ableitung $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$:

  Gilt $(A \to \varepsilon) \in P$, so wird A ganz am Anfang in V_ε aufgenommen.

  Ansonsten gibt es eine Produktion $(A \to A_1 A_2 \cdots A_n) \in P$ mit $A_i \Rightarrow_G^* \varepsilon$ für alle $1 \leq i \leq n$, wobei die Ableitung $A_i \Rightarrow_G^* \varepsilon$ Länge $< \ell$ hat.

  Nach Induktion wird jede Variable A_i $(1 \leq i \leq n)$ irgendwann in V_ε aufgenommen.

  Dann gilt das gleiche aber auch für A.

Normalformen

Für ein nicht-leeres Wort $w \in (V \cup \Sigma)^+$ definieren wir die Menge von Wörtern $F(w) \subseteq (V \cup \Sigma)^+$ wie folgt:

Sei $w = w_0 A_1 w_1 A_2 \cdots w_{n-1} A_n w_n$ wobei $n \geq 0$, $A_1, \ldots, A_n \in V_\varepsilon$ und in dem Wort $w_0 w_1 \cdots w_n$ keine Variable aus V_ε vorkommt. Dann sei

$$F(w) = \{w_0 A_1^{e_1} w_1 A_2^{e_2} \cdots w_{n-1} A_n^{e_n} w_n \mid e_1, \ldots e_n \in \{0,1\}\} \setminus \{\varepsilon\}.$$

wobei $A_i^0 = \varepsilon$ und $A_i^1 = A_i$.

Intuitiv: Alle Wörter, die man aus w bilden kann, indem manche (aber nicht unbedingt alle) Vorkommen von Variablen aus V_ε gelöscht werden, wobei das leere Wort nicht genommen wird.

Wir können nun die Produktionsmenge P' der ε-freien Grammatik G' wie folgt definieren:

$$P' = \{A \to w' \mid \exists w : (A \to w) \in P \text{ und } w' \in F(w)\}.$$

Normalformen

Behauptung: $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$

Beweis der Behauptung:

- $L(G') \subseteq L(G) \setminus \{\varepsilon\}$: Nach Konstruktion von G' gilt $\varepsilon \notin L(G')$.

  Ausserdem gilt für jede Produktion $(A \to w') \in P'$ von G':

  $$A \Rightarrow_G^* w'.$$

  Dies impliziert $L(G') \subseteq L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

- $L(G) \setminus \{\varepsilon\} \subseteq L(G')$: Durch Induktion über die Länge von Ableitungen zeigen wir für alle Nichtterminale $A \in V$ und Wörter $w \in \Sigma^+$:

  $$A \Rightarrow_G^* w \quad \textit{impliziert} \quad A \Rightarrow_{G'}^* w.$$

  Gelte also $A \Rightarrow_G^* w$.

Normalformen

Wenn $(A \to w) \in P$, dann $(A \to w) \in P'$ und somit $A \Rightarrow_{G'}^* w$.

Angenommen die Ableitung $A \Rightarrow_G^* w$ hat Länge mindestens 2.

Es muss eine Produktion $(A \to w_0 A_1 w_1 A_2 w_2 \cdots A_n w_n) \in P$ und kürzere Ableitungen $A_i \Rightarrow_G^* u_i$ $(1 \leq i \leq n)$ mit $w = w_0 u_1 w_1 u_2 w_2 \cdots u_n w_n$ geben.

Sei $J = \{i \mid 1 \leq i \leq n, u_i = \varepsilon\}$.

Sei w' das Wort, dass aus $w_0 A_1 w_1 A_2 w_2 \cdots A_n w_n$ entsteht, indem alle A_i mit $i \in J$ durch ε ersetzt werden (beachte: $A_i \in V_\varepsilon$ für alle $i \in J$).

Da $w \neq \varepsilon$ muss auch $w' \neq \varepsilon$ gelten.

Nach Definition von P' gilt $(A \to w') \in P'$.

Ausserdem gilt nach Induktion: $A_i \Rightarrow_{G'}^* u_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus J$.

Insgesamt ergibt sich $A \Rightarrow_{G'}^* w$. □

Normalformen

Der soeben bewiesene Satz zeigt insbesondere:

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik, deren Produktionen alle von der Form $A \to w$ für $A \in V$, $w \in (V \cup \Sigma)^*$ sind. Dann ist $L(G)$ kontextfrei.

Beweis: Konstruiere aus G eine kontextfreie Grammatik G', so dass $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ und G' keine Produktionen der Form $A \to \varepsilon$ enthält.

Falls $\varepsilon \notin L(G)$ gilt, erhalten wir $L(G') = L(G)$.

Sei nun $\varepsilon \in L(G)$.

Nimm ein neues Startsymbol S' und füge zu G' die Produktionen $S' \to \varepsilon \mid S$ hinzu.

Die resultierende Grammatik H ist kontextfrei (ε-Sonderregelung) und es gilt $L(G) = L(G') \cup \{\varepsilon\} = L(H)$. □

Normalformen

Beispiel: Betrachte die Grammatik G mit den folgenden Produktionen:

$$S \to aABC, \quad A \to \varepsilon \mid AA, \quad B \to \varepsilon \mid BbA, \quad C \to \varepsilon \mid CAc$$

Es gilt $V_\varepsilon = \{A, B, C\}$.

Für die (nicht-leeren) rechten Seiten der Grammatik ergibt sich:

- $F(aABC) = \{aABC, aBC, aAC, aAB, aA, aB, aC, a\}$
- $F(AA) = \{AA, A\}$
- $F(BbA) = \{BbA, bA, Bb, b\}$
- $F(CAc) = \{CAc, Ac, Cc, c\}$

Normalformen

Beachte: $\varepsilon \notin L(G)$. Daher erfüllt die Grammatik G' mit den folgenden Produktionen $L(G) = L(G')$:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & aABC \mid aBC \mid aAC \mid aAB \mid aA \mid aB \mid aC \mid a \\
A & \to & AA \mid A \\
B & \to & BbA \mid bA \mid Bb \mid b \\
C & \to & CAc \mid Ac \mid Cc \mid c
\end{array}
$$

Bemerkung: Die auf Folie 189 definierte Menge kann bis zu 2^n Wörter enthalten. Dies kann dazu führen, dass die konstruierte Grammatik G' recht groß wird.

Normalformen

Wir betrachten nun eine weitere wichtige Normalform:

Definition (Chomsky-Normalform)

Eine kontextfreie Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ heißt in Chomsky-Normalform (kurz CNF), falls alle Produktionen eine der folgenden zwei Formen haben:

$$A \to BC \qquad A \to a$$

Dabei sind $A, B, C \in V$ Variablen und $a \in \Sigma$ ein Terminalsymbol.

Satz (Umwandlung in Chomsky-Normalform)

Zu jeder kontextfreien Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ gibt es eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L(G')$.

Normalformen

Beweis:

Schritt 1:

Auf Grund des Satzes "ε-freie Grammatiken" (Folie 186) können wir davon ausgehen, dass G keine Produktionen der Form $A \to \varepsilon$ hat.

Schritt 2:

Wir führen für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ eine neue Variable $A_a \notin V$ zusammen mit der Produktion $A_a \to a$ ein.

Dann können wir jedes Vorkommen von a in einer rechten Seite $\neq a$ durch A_a ersetzen.

Danach haben alle Produktionen die Form $A \to a$ oder $A \to A_1 \cdots A_n$ mit $a \in \Sigma$, $n \geq 1$ und Variablen $A_1, \ldots, A_n$.

Normalformen

Schritt 3: Elimination von Kettenregeln.

Wir eliminieren nun alle Produktionen der Form $A \to B$ für Variablen A, B (Kettenregeln) wie folgt:

Für jede Variable A fügen wir die Produktion $A \to \alpha$ hinzu, falls α keine Variable ist und eine Variable B mit $A \Rightarrow^* B \to \alpha$ existiert.

Dannach können wir alle Kettenregeln weglassen.

Alle Produktionen haben nun die Form $A \to a$ oder $A \to A_1 \cdots A_n$ mit $a \in \Sigma$, $n \geq 2$ und Variablen $A_1, \ldots, A_n$.

Normalformen

Schritt 4: Elimination von Produktionen der Form $A \to A_1 \cdots A_n$ mit $n \geq 3$.

Sei $A \to A_1 \cdots A_n$ eine Produktion mit $n \geq 3$.

Wir führen neue Variablen $B_2, \ldots, B_{n-1}$ ein und ersetzen die Produktion $A \to A_1 \cdots A_n$ durch die folgenden Produktionen:

$$A \to A_1 B_2, \quad B_i \to A_i B_{i+1} \ (2 \leq i \leq n-2), \quad B_{n-1} \to A_{n-1} A_n$$

□

Normalformen

Beispiel: Sei

$$G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

mit folgender Produktionenmenge P:

$$\begin{aligned} S &\to aAb \\ A &\to S \mid aaSc \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Wir wandeln G in CNF um.

Schritt 1: Wir machen G ε-frei.

Dies ergibt die Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to aAb \mid ab \\ A &\to S \mid aaSc \end{aligned}$$

Normalformen

Schritt 2: Dies ergibt die Produktionen

$$
\begin{aligned}
S &\to A_a A A_b \mid A_a A_b \\
A &\to S \mid A_a A_a S A_c \\
A_a &\to a \\
A_b &\to b \\
A_c &\to c
\end{aligned}
$$

Normalformen

Schritt 3: Elimination von Kettenregeln.

Die einzige Kettenregel unserer Grammatik ist $A \to S$. Deren Elimination liefert die folgenden Produktionen:

$$
\begin{aligned}
S &\to A_a A A_b \mid A_a A_b \\
A &\to A_a A A_b \mid A_a A_b \mid A_a A_a S A_c \\
A_a &\to a \\
A_b &\to b \\
A_c &\to c
\end{aligned}
$$

Normalformen

Schritt 4: Elimination von Regeln der Gestalt $A \to A_1 \cdots A_n$ mit $n \geq 3$.

$$
\begin{array}{rcl}
S & \to & A_a B \mid A_a A_b \\
A & \to & A_a B \mid A_a A_b \mid A_a C \\
B & \to & A A_b \\
C & \to & A_a S A_c \\
A_a & \to & a \\
A_b & \to & b \\
A_c & \to & c
\end{array}
$$

Normalformen

Schritt 4: Elimination von Regeln der Gestalt $A \to A_1 \cdots A_n$ mit $n \geq 3$.

$$
\begin{array}{rcl}
S & \to & A_a B \mid A_a A_b \\
A & \to & A_a B \mid A_a A_b \mid A_a C \\
B & \to & A A_b \\
C & \to & A_a D \\
D & \to & S A_c \\
A_a & \to & a \\
A_b & \to & b \\
A_c & \to & c
\end{array}
$$

Normalformen

Definition (Greibach-Normalform)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\varepsilon \notin L(G)$ ist in Greibach-Normalform, falls alle Produktionen aus P folgende Form haben:

$$A \to aB_1B_2 \dots B_k \qquad \text{mit } k \geq 0$$

Dabei sind $A, B_1, \cdots, B_k \in V$ Variablen und $a \in \Sigma$ ein Alphabetsymbol.

Die Greibach-Normalform garantiert, dass bei jedem Ableitungsschritt genau ein Alphabetsymbol entsteht.
Sie ist nützlich, um zu zeigen, dass Kellerautomaten (d.h., Automaten für kontextfreie Sprachen) keine ε-Übergänge brauchen.

Satz (Umwandlung in Greibach-Normalform)

Zu jeder kontextfreien Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ gibt es eine Grammatik G' in Greibach-Normalform mit $L(G) = L(G')$.

Normalformen

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $\varepsilon \notin L(G)$.

Vorüberlegung:

Angenommen in P gibt es für eine Variable A die folgenden Produktionen:

$$A \to A\alpha_1 \mid \cdots \mid A\alpha_k \mid \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_\ell.$$

Hierbei sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell \in (V \cup \Sigma)^*$ und $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$ beginnen nicht mit A.

Dann kann man mit diesen Produktionen genau die gleichen Satzformen erzeugen wie mit

$$A \to \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_\ell \mid \beta_1 B \mid \cdots \mid \beta_\ell B$$
$$B \to \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_k \mid \alpha_1 B \mid \cdots \mid \alpha_k B.$$

Mit beiden Regelsätzen lassen sich alle Satzformen aus

$$(\beta_1 \mid \cdots \mid \beta_\ell)(\alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_k)^*$$

erzeugen.

Normalformen

Sei nun $A_1, \ldots, A_m$ eine beliebige Aufzählung aller Variablen von G.

Schritt 1: Mit dem Algorithmus auf der nächsten Folie formen wir G in eine äquivalente kontextfreie Grammatik um, in der für alle Produktionen der Form $A_i \to \alpha$ gilt:

$$\alpha = a\beta \text{ mit } a \in \Sigma, \beta \in V^* \text{ oder } \alpha = A_j\beta \text{ mit } j > i, \beta \in V^*$$

O.B.d.A. können wir davon ausgehen, dass G in Chomsky-Normalform ist.

Normalformen

for $i := 1$ **to** m **do**
  for $j := 1$ **to** $i - 1$ **do**
    for all $(A_i \to A_j\alpha) \in P$ **do**
      Seien $A_j \to \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_n$ alle Regeln mit linker Seite $= A_j$.
      $P := (P \cup \{A_i \to \beta_1\alpha \mid \cdots \mid \beta_n\alpha\}) \setminus \{A_i \to A_j\alpha\}$
    endfor
  endfor
  if es gibt Produktionen der Form $A_i \to A_i\alpha$ **then**
    Wende die Transformation aus der Vorüberlegung auf A_i an
    (dabei wird eine neue Variable B_i eingeführt).
  endif
endfor

Normalformen

Nach Schritt 1 sind insbesondere alle Produktionen mit linker Seite $= A_m$ von der Form $A_m \to a\alpha$ mit $a \in \Sigma, \alpha \in V^*$.

Schritt 2: Der folgende Algorithmus erzwingt, dass alle Produktionen mit linker Seite A_i rechts mit einem Terminalsymbol beginnen.

for $i := m - 1$ **downto** 1 **do**
    forall $(A_i \to A_j\alpha) \in P$ mit $j > i$ **do**
        Seien $A_j \to \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_n$ alle Regeln mit linker Seite $= A_j$.
        $P := (P \cup \{A_i \to \beta_1\alpha \mid \cdots \mid \beta_n\alpha\}) \setminus \{A_i \to A_j\alpha\}$
    endfor
endfor

Nach Schritt 2 sind alle Produktionen mit linker Seite $= A_i$ $(1 \leq i \leq m)$ in Greibach-Normalform.

Aber: Die in Schritt 1 eingeführten Produktionen für die neuen Variablen B_i könnten nicht in Greibach-Normalform sein.

Normalformen

Sei $B_i \to A_j\alpha$ eine solche Regel, die die Greibach-Normalform verletzt.

Seien $A_j \to \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_k$ alle Produktionen mit linker Seite $= A_j$.

Dann beginnen $\beta_1, \ldots, \beta_k$ mit Terminalsymbolen.

Ersetze $B_i \to A_j\alpha$ durch $B_i \to \beta_1\alpha \mid \cdots \mid \beta_k\alpha$.

Nun ist die Grammatik in Greibach-Normalform. □

Normalformen

Beispiel: Sei G die Grammatik in CNF mit folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2A_3 \\ A_2 &\to A_3A_1 \mid b \\ A_3 &\to A_1A_2 \mid a. \end{aligned}$$

In Schritt 1 wird nur die Produktion $A_3 \to A_1A_2$ im Durchlauf $i = 3$ wie folgt ersetzt:

- Bei $j = 1$: $A_3 \to A_2A_3A_2$
- Bei $j = 2$: $A_3 \to A_3A_1A_3A_2 \mid bA_3A_2$

Nun wird eine neue Variable B_3 eingeführt, und die Produktionen

$$A_3 \to A_3A_1A_3A_2 \mid bA_3A_2 \mid a$$

werden ersetzt durch

$$\begin{aligned} A_3 &\to bA_3A_2B_3 \mid aB_3 \mid bA_3A_2 \mid a \\ B_3 &\to A_1A_3A_2B_3 \mid A_1A_3A_2. \end{aligned}$$

Normalformen

Wir haben also nach Schritt 1 folgende Grammatik vorliegen:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 A_3 \\ A_2 &\to A_3 A_1 \mid b \\ A_3 &\to bA_3 A_2 B_3 \mid aB_3 \mid bA_3 A_2 \mid a \\ B_3 &\to A_1 A_3 A_2 B_3 \mid A_1 A_3 A_2. \end{aligned}$$

Beachte: Alle Produktionen für A_3 beginnen in der Tat mit einem Terminalsymbol auf der rechten Seite.

Nach Schritt 2, Durchlauf $i = 2$:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 A_3 \\ A_2 &\to bA_3 A_2 B_3 A_1 \mid aB_3 A_1 \mid bA_3 A_2 A_1 \mid aA_1 \mid b \\ A_3 &\to bA_3 A_2 B_3 \mid aB_3 \mid bA_3 A_2 \mid a \\ B_3 &\to A_1 A_3 A_2 B_3 \mid A_1 A_3 A_2 \end{aligned}$$

Normalformen

Nach Schritt 2, Durchlauf $i = 1$:

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to bA_3A_2B_3A_1A_3 \mid aB_3A_1A_3 \mid bA_3A_2A_1A_3 \mid aA_1A_3 \mid bA_3 \\
A_2 &\to bA_3A_2B_3A_1 \mid aB_3A_1 \mid bA_3A_2A_1 \mid aA_1 \mid b \\
A_3 &\to bA_3A_2B_3 \mid aB_3 \mid bA_3A_2 \mid a \\
B_3 &\to A_1A_3A_2B_3 \mid A_1A_3A_2
\end{aligned}
$$

Nun muss noch in den rechten Seiten der B_3-Produktionen A_1 durch die rechten Seiten von A_1 ersetzt werden:

Normalformen

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to bA_3A_2B_3A_1A_3 \mid aB_3A_1A_3 \mid bA_3A_2A_1A_3 \mid aA_1A_3 \mid bA_3 \\
A_2 &\to bA_3A_2B_3A_1 \mid aB_3A_1 \mid bA_3A_2A_1 \mid aA_1 \mid b \\
A_3 &\to bA_3A_2B_3 \mid aB_3 \mid bA_3A_2 \mid a \\
B_3 &\to bA_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2B_3 \mid aB_3A_1A_3A_3A_2B_3 \mid bA_3A_2A_1A_3A_3A_2B_3 \mid \\
&\quad aA_1A_3A_3A_2B_3 \mid bA_3A_3A_2B_3 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2 \mid \\
&\quad aB_3A_1A_3A_3A_2 \mid bA_3A_2A_1A_3A_3A_2 \mid aA_1A_3A_3A_2 \mid bA_3A_3A_2
\end{aligned}
$$

Normalformen

Bemerkung zum leeren Wort ε: Mit Grammatiken in Chomsky-Normalform bzw. Greibach-Normalform lassen sich nur kontextfreie Sprachen L mit $\varepsilon \notin L$ erzeugen.

Hat man nun eine kontextfreie Grammatik G mit $\varepsilon \in L(G)$ vorliegen, so kann man wie folgt vorgehen:

- Konstruiere aus G eine kontextfreie Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ (siehe Satz auf Folie 186).
- Wandle G' in eine Grammatik G'' in Chomsky-Normalform bzw. Greibach-Normalform um.

  Sei S das Startsymbol von G'' und seien $S \to \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_n$ alle Produktionen in G'' mit linker Seite $= S$.
- Nimm ein neues Startsymbol S' und füge zu G'' die Produktionen $S' \to \varepsilon \mid \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_n$ hinzu.

  Für die resultierende Grammatik H gilt $L(G) = L(H)$, und bis auf die Produktion $S' \to \varepsilon$ sind alle Produktionen in H in Chomsky-Normalform bzw. Greibach-Normalform.

Pumping-Lemma

Weitgehend analog zu regulären Sprachen kann man nun ein Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen zeigen.

Die für reguläre Sprachen und endliche Automaten geltende Aussage

Jedes ausreichend lange Wort durchläuft einen Zustand des Automaten zweimal.

wird dabei ersetzt durch

Auf einem Pfad des Syntaxbaums, der die Ableitung eines ausreichend langen Wortes durch eine kontextfreie Grammatik darstellt, kommt eine Variable mindestens zweimal vor.

Pumping-Lemma

Was bedeutet hier "ausreichend langes Wort"?

Die Beantwortung dieser Frage hängt davon ab, in welcher Form sich die Grammatik befindet.

Wir nehmen an, sie befinde sich in Chomsky-Normalform.

Dann gilt: Syntaxbäume sind (bis auf die unterste Schicht der Blätter) immer Binärbäume (aufgrund der Produktionen der Form $A \to BC$).

Für Binärbäume gilt nun:

Lemma (Länge von Pfaden in Binärbäumen)

Sei B ein Binärbaum (d.h., jeder Knoten in B hat entweder null oder zwei Kinder) mit mindestens 2^k Blättern.
Dann hat B einen Pfad von der Wurzel zu einem Blatt, der aus mindestens k Kanten und $k+1$ Knoten besteht.

Pumping-Lemma

Beweis: Induktion über k.

Induktionsanfang: $k = 0$.

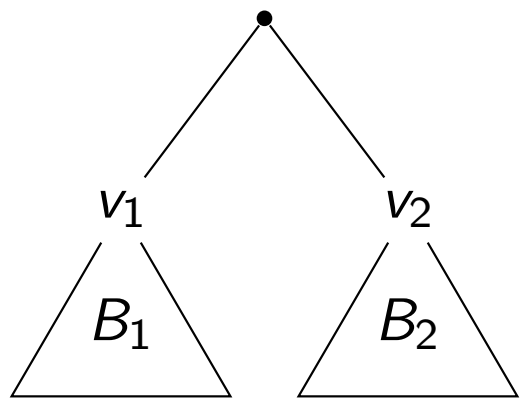
Sei B ein Binärbaum mit mindestens $2^0 = 1$ Blättern.

Dann hat B einen Pfad, der aus mindestens einem Knoten (nämlich der Wurzel) besteht.

Induktionsschluss: $k \geq 0$.

Sei B ein Binärbaum mit mindestens $2^{k+1} = 2^k + 2^k$ Blättern.

Seien v_1 und v_2 die beiden Kinder der Wurzel, und seien B_1 und B_2 die Binärbäume mit Wurzel v_1 bzw. v_2:



Pumping-Lemma

Dann muss B_1 oder B_2 mindestens 2^k Blätter haben: Hätte sowohl B_1 als auch B_2 echt weniger als 2^k Blätter, dann hätte der Baum B echt weniger als $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ Blätter.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe B_1 mindestens 2^k viele Blätter.

Nach Induktionshypothese gibt es in B_1 einen Pfad von der Wurzel v_1 zu einem Blatt mit mindestens k Kanten und $k + 1$ Knoten.

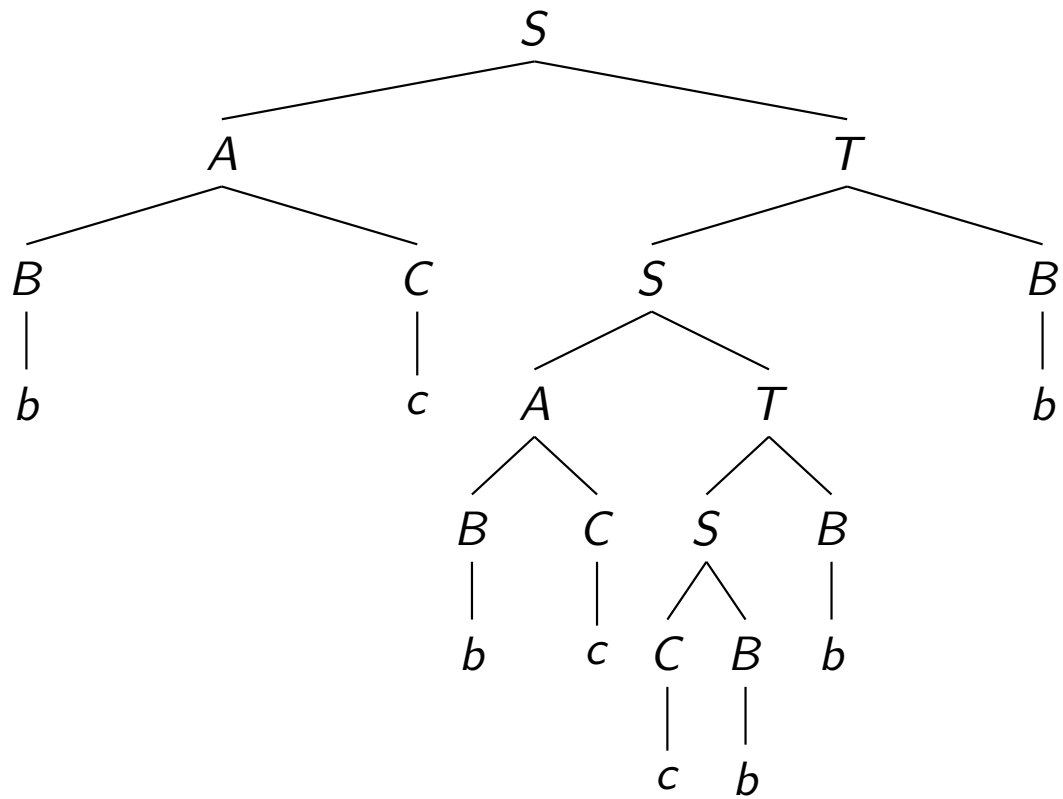
Indem wir zu diesem Pfad die Kante von der Wuzel nach v_1 hinzufügen, erhalten wir in B einen Pfad von der Wurzel zu einem Blatt mit mindestens $k + 1$ Kanten und $k + 2$ Knoten. □

Pumping-Lemma

Beispiel: Die kontextfreie Grammatik G (in CNF) bestehe aus folgenden Produktionen:

$$S \to AT \mid CB,\ T \to SB,\ A \to BC,\ B \to b,\ C \to c.$$

Betrachte folgenden Syntaxbaum:

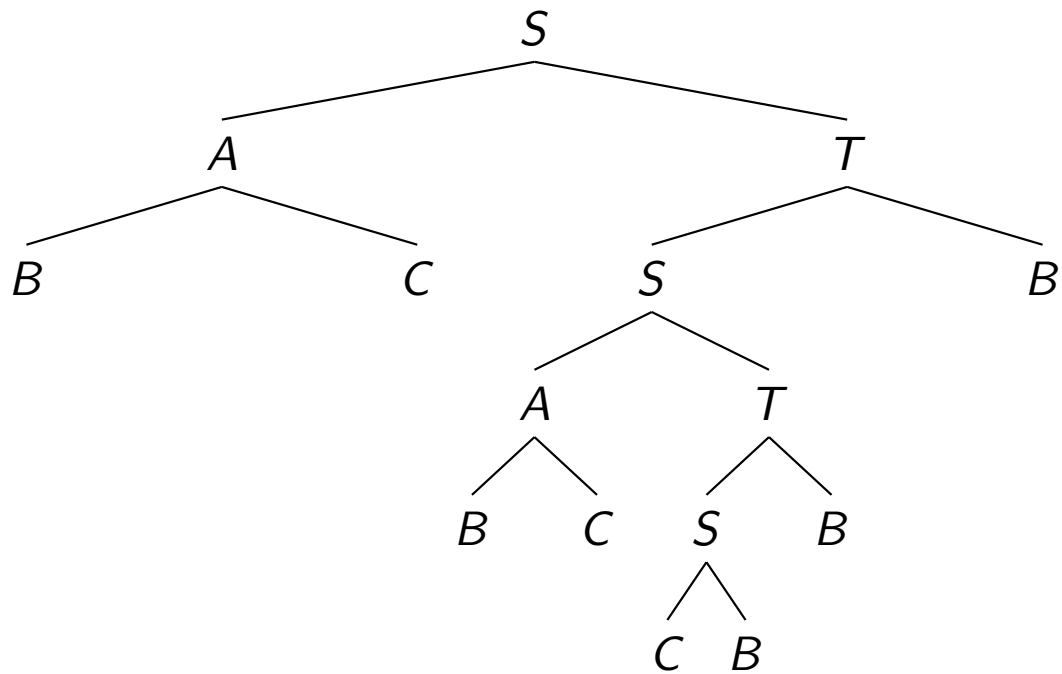


Pumping-Lemma

Beispiel: Die kontextfreie Grammatik G (in CNF) bestehe aus folgenden Produktionen:

$$S \to AT \mid CB,\ T \to SB,\ A \to BC,\ B \to b,\ C \to c.$$

Entfernen der Blätter liefert einen Binärbaum:

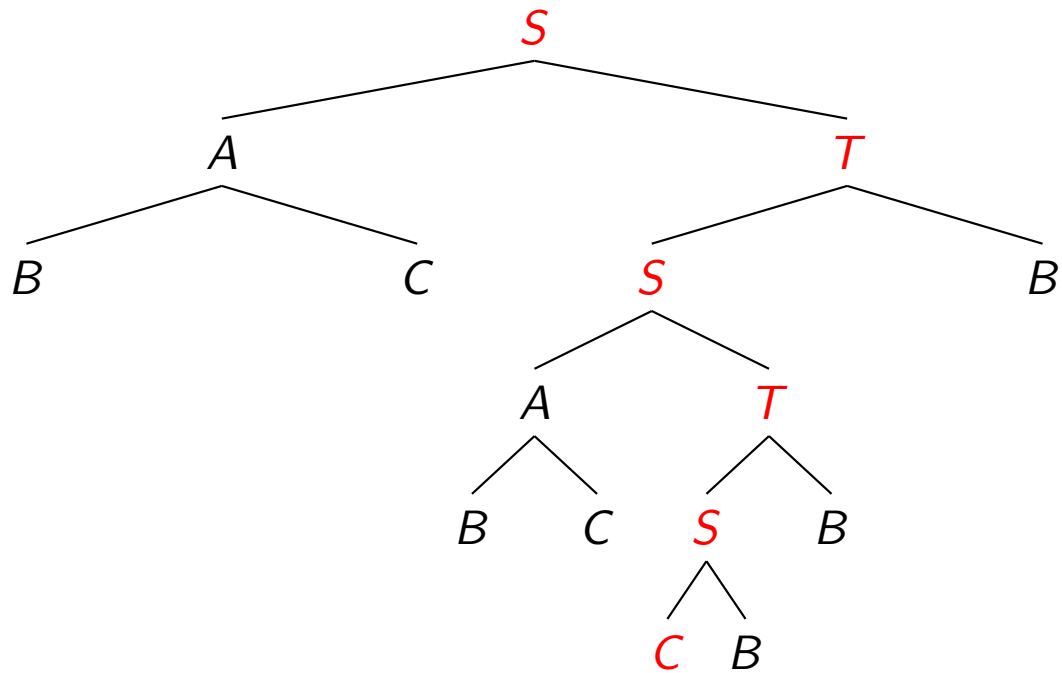


Pumping-Lemma

Beispiel: Die kontextfreie Grammatik G (in CNF) bestehe aus folgenden Produktionen:

$$S \to AT \mid CB,\ T \to SB,\ A \to BC,\ B \to b,\ C \to c.$$

Entfernen der Blätter liefert einen Binärbaum:



Pumping-Lemma

Sei nun $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in Chomsky-Normalform mit $k = |V|$ vielen Variablen.

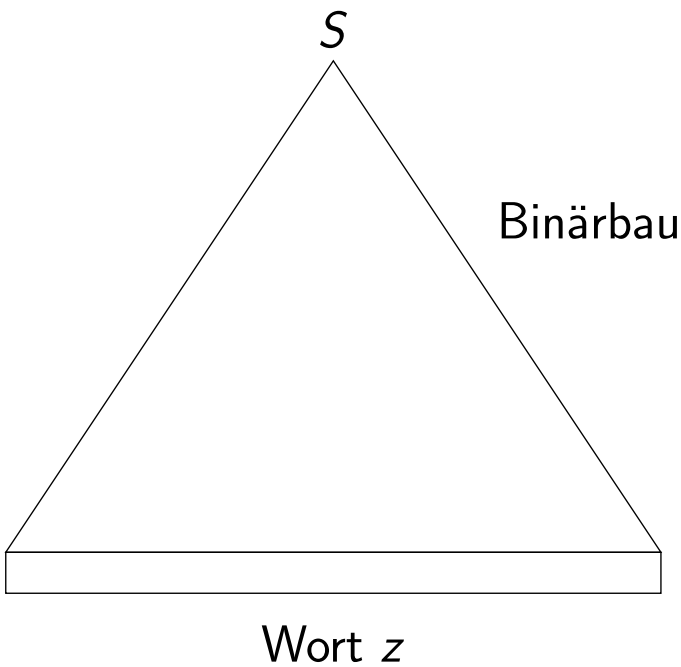
Sei weiter $z \in L(G)$.

- Wenn $|z| \geq 2^k$, dann hat jeder Syntaxbaum für z offensichtlich mindestens 2^k Blätter.
- Betrachte einen Syntaxbaum für z und entferne die mit den Terminalsymbolen beschrifteten Blätter.
  Dies ergibt einen Binärbaum T.
- Betrachte einen längsten Pfad in T von der Wurzel zu einem Blatt.
- Das Lemma von Folie 216 impliziert, dass dieser Pfad mindestens $k + 1 > |V|$ viele Knoten hat.
- Also kommt auf dem Pfad eine Variable A mindestens zweimal vor (wir sprechen von einem Doppelvorkommen im folgenden).

Pumping-Lemma

Syntaxbaum für ein Wort z mit $|z| \geq n = 2^k$

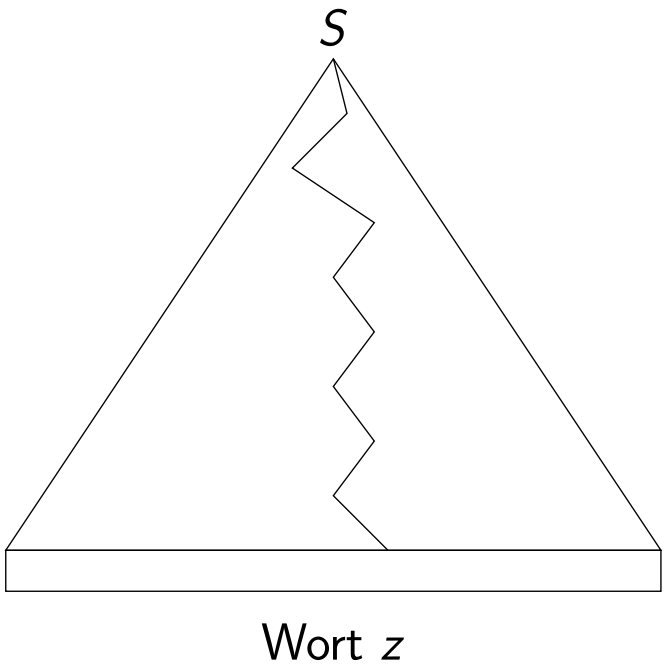
n ist hier die "Konstante des Pumping-Lemmas".



Ebene der Blätter
(letzter Ableitungsschritt)

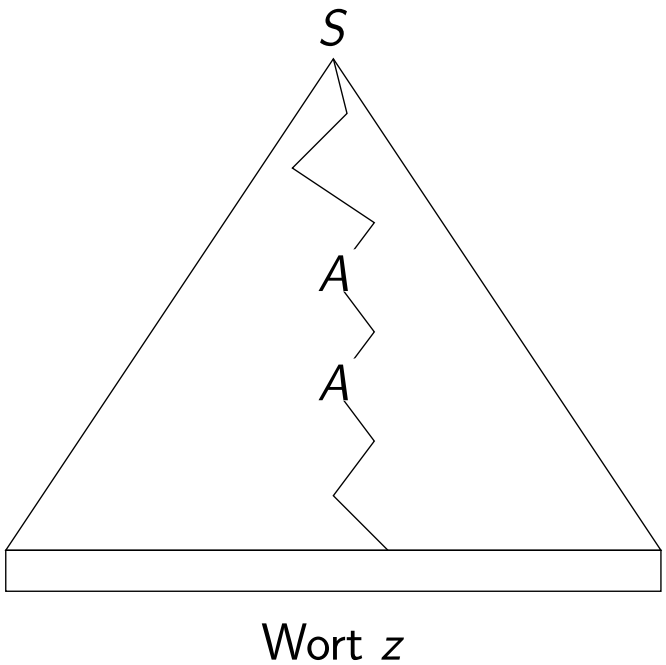
Pumping-Lemma

Ein längster Pfad hat mindestens $k + 1$ innere Knoten.



Pumping-Lemma

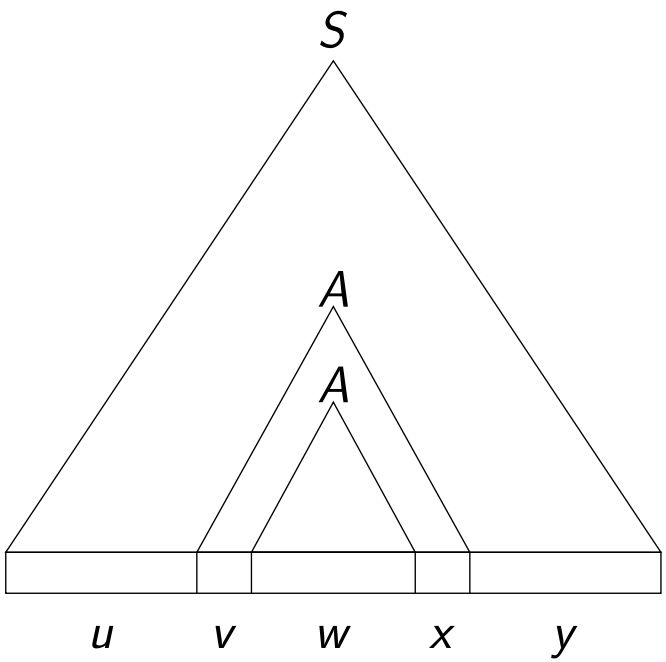
Auf diesem Pfad gibt es eine Variable, die zweimal auftaucht, etwa A.



Pumping-Lemma

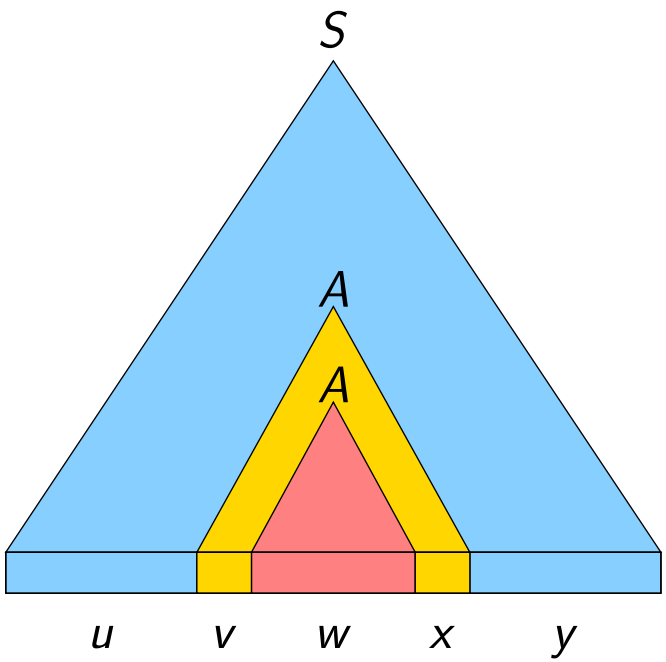
Das Wort z wird nun in fünf Teilwörter u, v, w, x, y aufgespalten:

- w wird aus dem unteren A abgeleitet: $A \Rightarrow^* w$
- vwx wird aus dem oberen A abgeleitet: $A \Rightarrow^* vAx \Rightarrow^* vwx$



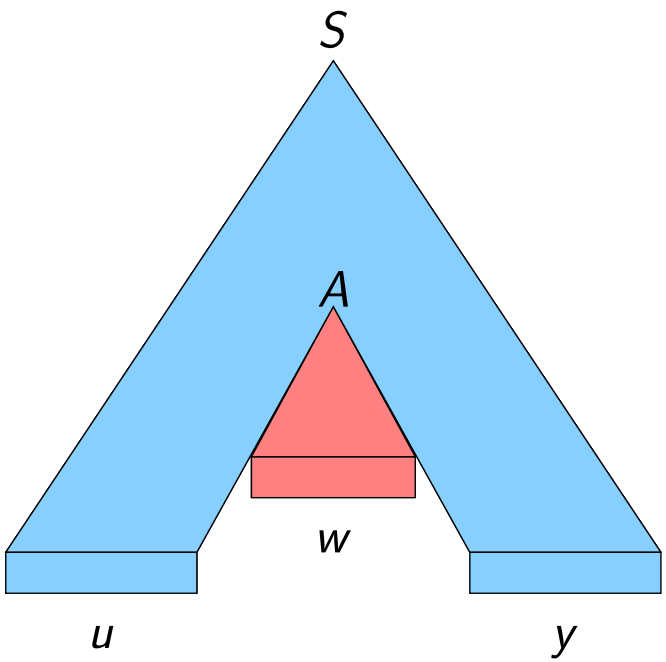
Pumping-Lemma

Damit erhält man drei ineinander enthaltene Teil-Syntaxbäume, die man neu zusammenstecken kann.



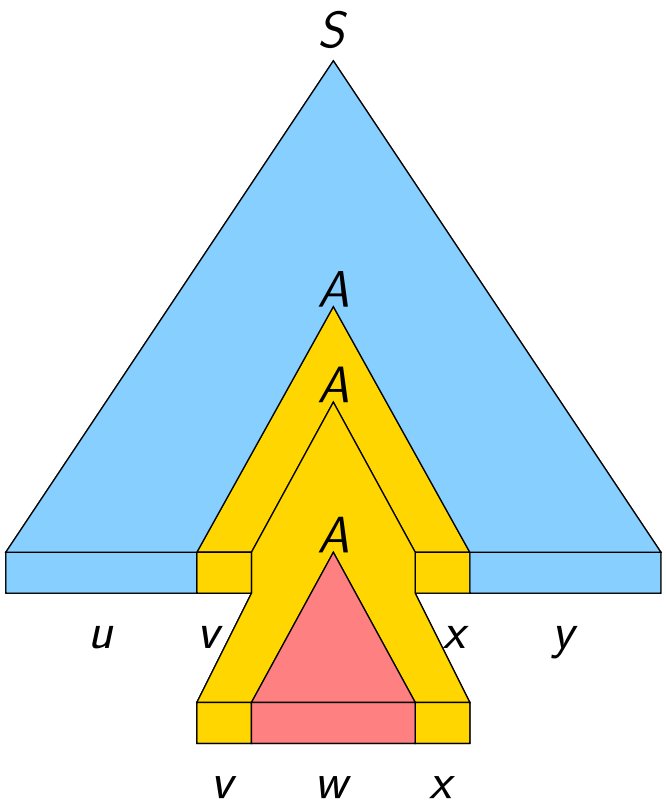
Pumping-Lemma

Durch Weglassen des mittleren Teilbaums erhält man einen Syntaxbaum für uwy. Damit gilt: $uwy \in L(G)$.



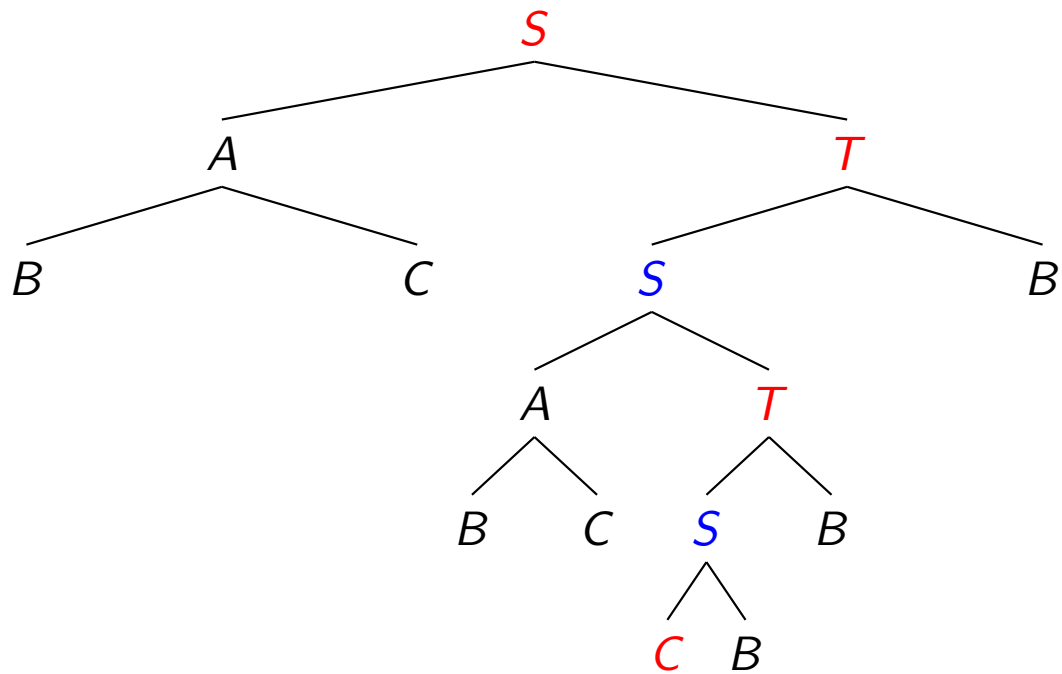
Pumping-Lemma

Durch Verdoppeln des mittleren Teilbaums erhält man einen Syntaxbaum für uv^2wx^2y. Damit gilt: $uv^2wx^2y \in L(G)$.



Pumping-Lemma

Am konkreten Beispiel von Folie 219.



Wir erhalten: $u = bc$, $v = bc$, $w = cb$, $x = b$, $y = b$

Pumping-Lemma

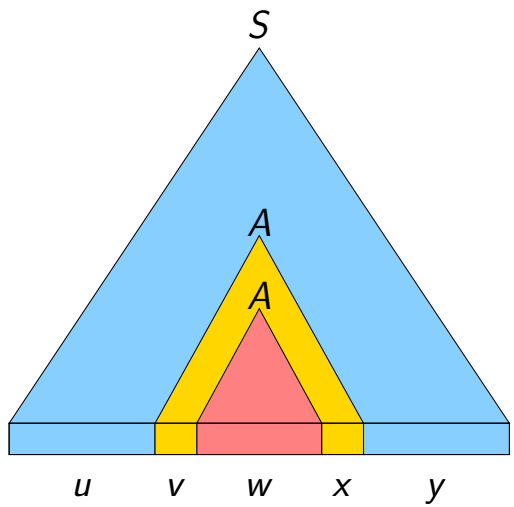
Außerdem kann man für v, w, x folgende Eigenschaften verlangen:

$|vwx| \leq n = 2^k$:

Wir können annehmen, dass wir das am weitesten unten liegende Doppelvorkommen einer Variable gewählt haben, d.h., das Doppelvorkommen mit der größten Tiefe.

Das kann dadurch erreicht werden, dass ein Pfad maximaler Länge von unten nach oben verfolgt wird, bis ein Doppelvorkommen entdeckt wird.

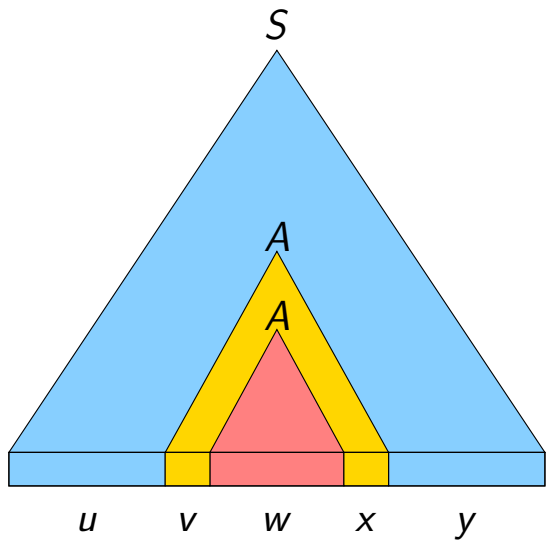
Demnach ist der Abstand des oberen A zur Blattebene höchstens k und der darunter hängende Binärbaum hat höchstens 2^k Blätter.



Pumping-Lemma

$|vx| \geq 1$:

Seien B, C die beiden Kinder des oberen A. Dann geht das untere A entweder aus B oder C hervor. Die jeweils andere Variable muss – da die Grammatik in Chomsy-Normalform ist – ein nicht-leeres Wort ableiten. Und dieses Wort ist ein Teilwort von v oder von x.



Das Pumping-Lemma

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Satz (Pumping-Lemma, *uvwxy*-Theorem)

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl n, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lassen als $z = uvwxy$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $|vx| \geq 1$,
2. $|vwx| \leq n$,
3. für alle $i \geq 0$ gilt: $uv^i wx^i y \in L$.

Dabei geht $n = 2^k$ aus der Anzahl k der Variablen einer kontextfreien Grammatik in CNF für L hervor.

Pumping-Lemma

Anwendung des Pumping-Lemmas:

Wir zeigen, dass die Sprache $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 1\}$ nicht kontextfrei ist.

1. Wir nehmen eine beliebige Zahl n an.
2. Wir wählen ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$. In diesem Fall eignet sich $z = a^n b^n c^n$.
3. Wir betrachten nun alle möglichen Zerlegungen $z = uvwxy$ mit den Einschränkungen $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$.

   Wegen $|vwx| \leq n$ gilt, dass vx nicht aus a's, b'c und c's bestehen kann, denn es kann sich nicht über den gesamten b-Block erstrecken.
4. Wir wählen für alle diese möglichen Zerlegungen $i = 2$ und betrachten uv^2wx^2y. Wegen der obigen Überlegungen sind nun ein oder zwei Alphabetsymbole gepumpt worden, mindestens eines jedoch nicht.

   Damit ist klar, dass uv^2wx^2y nicht in L liegen kann, denn jedes Wort in L hat gleich viele a's, b's und c's.

Pumping-Lemma

Man kann auch für folgende Sprachen zeigen, dass sie nicht kontextfrei sind:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\} \\ L_2 &= \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\} \\ L_3 &= \{a^{2^n} \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

Die Sprachen L_1, L_2, L_3 sind alle unär, d.h., sie sind Sprachen über einem einelementigen Alphabet: $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ mit $|\Sigma| = 1$

Für unäre Sprachen gilt sogar folgender Satz (ohne Beweis).

Satz (unäre kontextfreie Sprachen)

Jede kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet ist bereits regulär.

Abschlusseigenschaften

Abgeschlossenheit

Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter:

- Vereinigung (L_1, L_2 kontextfrei $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2$ kontextfrei)
- Produkt/Konkatenation (L_1, L_2 kontextfrei $\Rightarrow$ $L_1 L_2$ kontextfrei)
- Stern-Operation (L kontextfrei $\Rightarrow$ L^* kontextfrei)

Die kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen unter:

- Schnitt
- Komplement

Abschlusseigenschaften

Abschluss unter Vereinigung

Wenn L_1 und L_2 kontextfreie Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ kontextfrei.

Begründung: Seien $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Sei $S \notin V_1 \cup V_2$.

Dann ist $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

Abschlusseigenschaften

Abschluss unter Produkt/Konkatenation

Wenn L_1 und L_2 kontextfreie Sprachen sind, dann ist auch $L_1 L_2$ kontextfrei.

Begründung: Seien

$$G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1), \quad G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$$

kontextfreie Grammatiken. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Sei $S \notin V_1 \cup V_2$.

Dann ist

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$$

eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L(G_1)L(G_2)$.

Abschlusseigenschaften

Abschluss unter der Stern-Operation

Wenn L eine kontextfreie Sprache ist, dann ist auch L^* kontextfrei.

Begründung: Sei

$$G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$$

eine kontextfreie Grammatik.

Sei $S \notin V_1$.

Dann ist

$$G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \to \varepsilon, S \to S_1 S\}, S)$$

eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L(G_1)^*$.

Abschlusseigenschaften

Kein Abschluss unter Schnitt

Es gibt kontextfreie Sprachen L_1 und L_2, so dass $L_1 \cap L_2$ nicht kontextfrei ist.

Gegenbeispiel: Die Sprachen

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^j b^k c^k \mid j \geq 0, k \geq 0\} \\ L_2 &= \{a^k b^k c^j \mid j \geq 0, k \geq 0\} \end{aligned}$$

sind beide kontextfrei (L_1 wird z.B. durch eine Grammatik mit den Produktionen $S \to aS \mid A$, $A \to \varepsilon \mid bAc$ erzeugt).

Für ihren Schnitt gilt jedoch

$$L_1 \cap L_2 = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\},$$

und diese Sprache ist – wie mit dem Pumping-Lemma gezeigt wurde – nicht kontextfrei.

Abschlusseigenschaften

Kein Abschluss unter Komplement

Es gibt eine kontextfreie Sprache L, so dass $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ nicht kontextfrei ist.

Begründung:

Nehmen wir an, die kontextfreien Sprachen wären unter Komplement abgeschlossen und seien L_1 und L_2 kontextfrei. Wegen

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

(Regel von de Morgan) wäre dann auch $L_1 \cap L_2$ kontextfrei.

Dies ist ein Widerspruch zum Gegenbeispiel auf der vorherigen Folie.

Der CYK-Algorithmus

Wir kennen bereits ein Verfahren, mit dem man das Wortproblem für G lösen kann, wobei G eine Typ-1-, Typ-2- oder Typ-3-Grammatik sein kann (Folie 37).
Im wesentlichen: Aufzählen aller Wörter bis zu einer bestimmten Länge.

Da dieses Verfahren jedoch exponentielle Laufzeit (in der Länge des Wortes) haben kann, betrachten wir hier ein effizienteres Verfahren für kontextfreie Grammatiken: den CYK-Algorithmus
(entwickelt von Cocke, Younger, Kasami).

Voraussetzung: die Grammatik ist in Chomsky-Normalform, alle Produktionen haben also die Form $A \to a$ oder $A \to BC$.

Der CYK-Algorithmus

Idee: Gegeben sei ein Wort $x \in \Sigma^*$. Wir wollen feststellen, aus welchen Variablen es abgeleitet werden kann.

- **Möglichkeit 1:** $x = a \in \Sigma$, d.h., x besteht aus einem einzigen Alphabetsymbol.

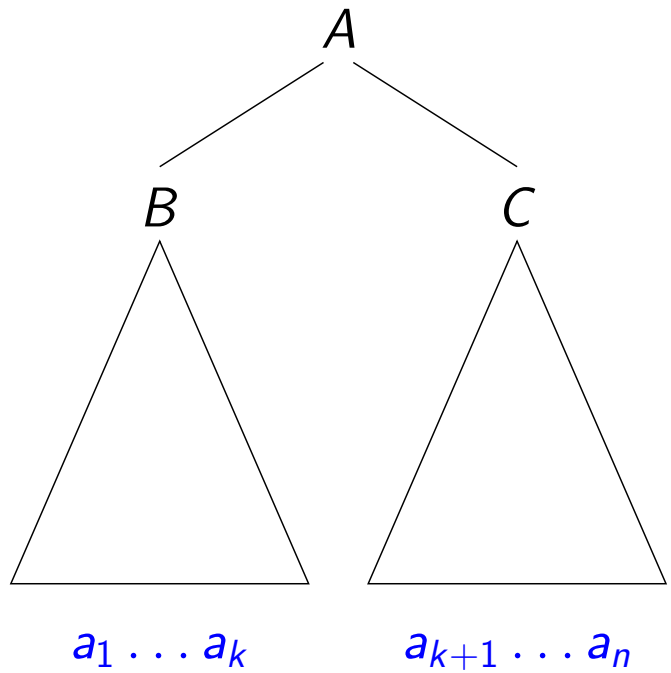
  Dann kann x nur aus Variablen A abgeleitet werden, für die es eine Produktion $A \to a$ gibt.

- **Möglichkeit 2:** $x = a_1 \cdots a_n$ mit $n \geq 2$.

  In diesem Fall gilt: Zunächst muss eine Produktion $A \to BC$ angewandt werden, dann muss ein Teil $a_1 \cdots a_k$ des Wortes aus B und der andere Teil $a_{k+1} \cdots a_n$ aus C abgeleitet werden $(1 \leq k < n)$.

Der CYK-Algorithmus

Möglichkeit 2 läßt sich schematisch folgendermaßen darstellen:



Der CYK-Algorithmus

Es ist jedoch nicht klar, wo das Wort x geteilt werden muss, d.h., wie groß die Position k ist!

Daher: Probiere alle möglichen k's durch. Das heißt:

Gegeben ein Wort $x = a_1 \cdots a_n$.

Für alle k mit $1 \leq k < n$ mache Folgendes:

- Bestimme die Menge V_1 aller Variablen, aus denen sich $a_1 \cdots a_k$ ableiten lässt.
- Bestimme die Menge V_2 aller Variablen, aus denen sich $a_{k+1} \cdots a_n$ ableiten lässt.
- Stelle fest, ob es Variablen A, B, C gibt mit $(A \to BC) \in P$, $B \in V_1$ und $C \in V_2$.
  In diesem Fall lässt sich x aus A ableiten .

Der CYK-Algorithmus

Um Mehraufwand zu vermeiden, verwenden wir die Methode der dynamischen Programmierung, das heißt:

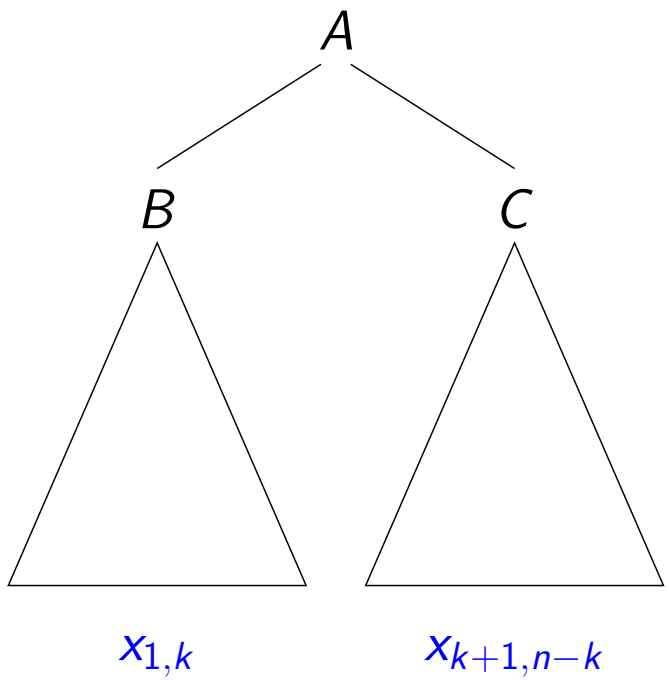
- berechne zuerst alle Variablen, aus denen sich Teilwörter der Länge 1 ableiten lassen,
- berechne dann alle Variablen, aus denen sich Teilwörter der Länge 2 ableiten lassen,
- $\vdots$
- zuletzt berechne alle Variablen, aus denen sich x ableiten läßt. Falls sich die Startvariable S unter diesen Variablen befindet, so liegt x in der von der Grammatik erzeugten Sprache.

Der CYK-Algorithmus

Notation: Wir bezeichnen mit $x_{i,j}$ das Teilwort von x, das an der Stelle i beginnt und die Länge j hat.

$$x = a_1 \cdots a_n \quad \Longrightarrow \quad x_{i,j} = a_i \cdots a_{i+j-1}$$

Damit sieht das obige Bild folgendermaßen aus:



Der CYK-Algorithmus

Wir bezeichnen mit $T_{i,j}$ die Menge aller Variablen, aus denen sich $x_{i,j}$ ableiten lässt:

$$T_{i,j} = \{A \in V \mid A \Rightarrow_G^* x_{i,j}\}$$

Dann gilt :

- $T_{i,1} = \{A \in V \mid (A \to a_i) \in P\}$.
- Für $j \geq 2$ lässt sich $T_{i,j}$ aus den Mengen $T_{\ell,k}$ mit $k < j$ folgendermaßen bestimmen:

  $$T_{i,j} = \{A \mid \exists (A \to BC) \in P \; \exists 1 \leq k < j : B \in T_{i,k} \text{ und } C \in T_{i+k,j-k}\}$$

Der CYK-Algorithmus

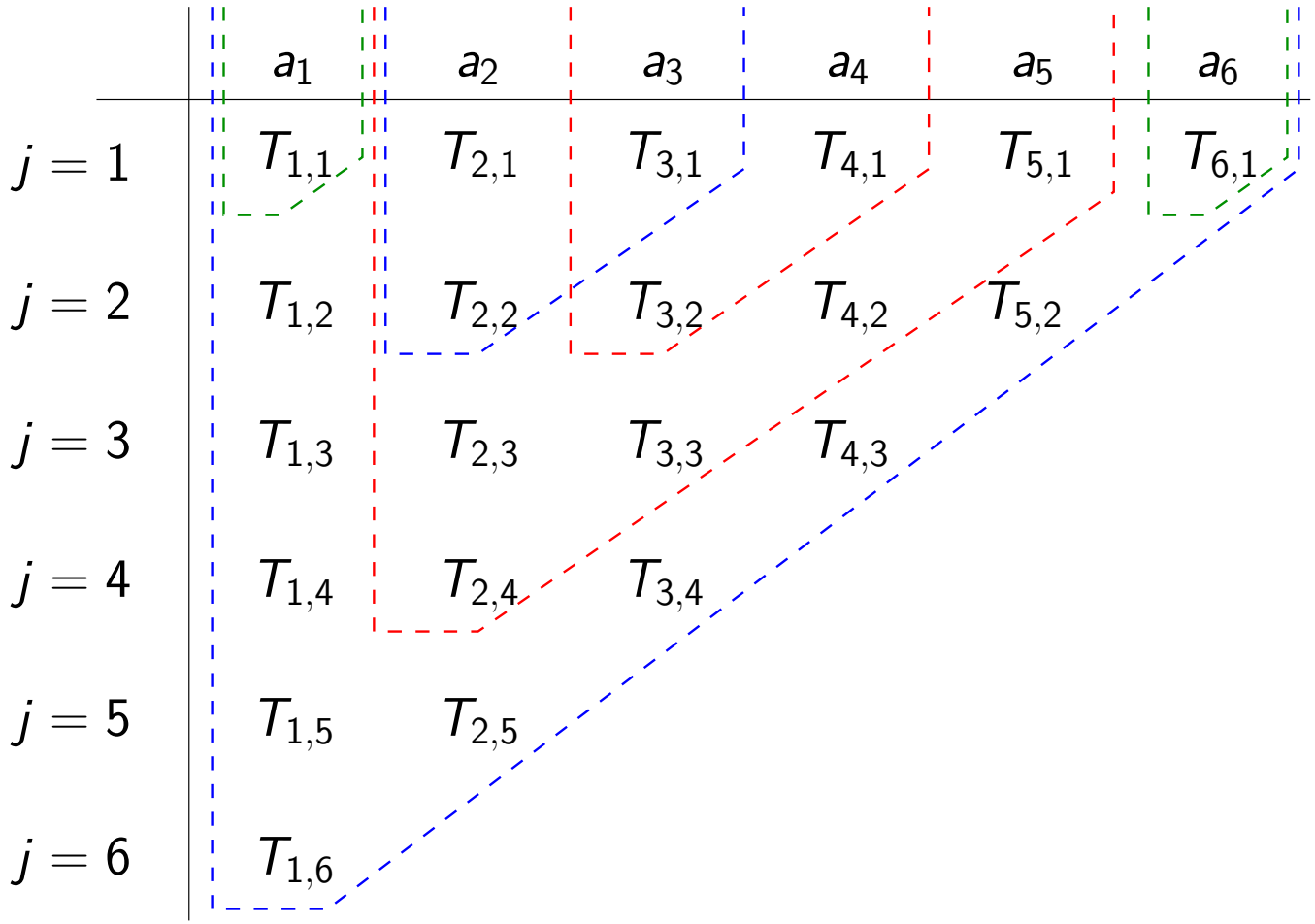
Praktische Ausführung des CYK-Algorithmus:

Wir tragen die Variablenmengen $T_{i,j}$ in folgende Tabelle ein:

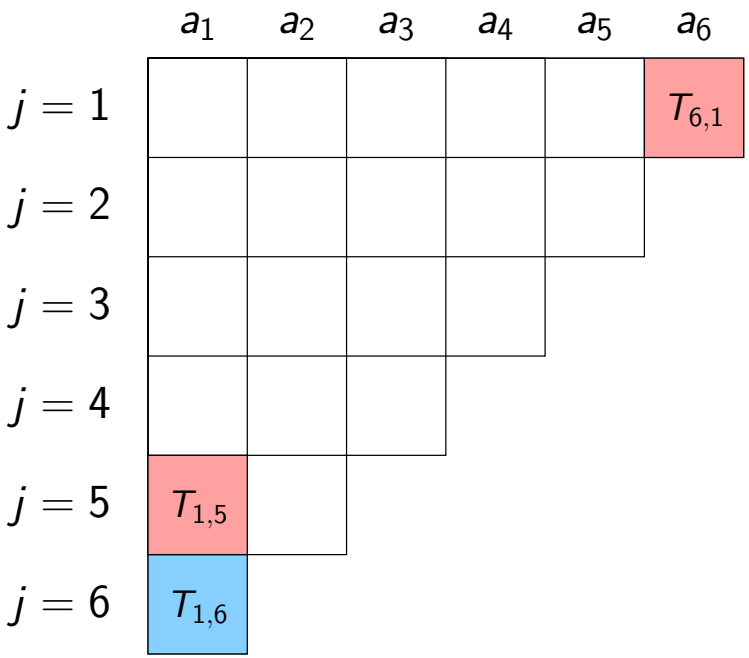
	a_1	a_2	$\ldots$		a_{n-1}	a_n
$j=1$	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$\ldots$	$\ldots$	$T_{n-1,1}$	$T_{n,1}$
$j=2$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$\ldots$	$\ldots$	$T_{n-1,2}$	
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$			
$j=n-1$	$T_{1,n-1}$	$T_{2,n-1}$				
$j=n$	$T_{1,n}$					

Der CYK-Algorithmus

Folgendermaßen lässt sich veranschaulichen, welche Variablenmenge welches Teilwort ableitet:



Der CYK-Algorithmus

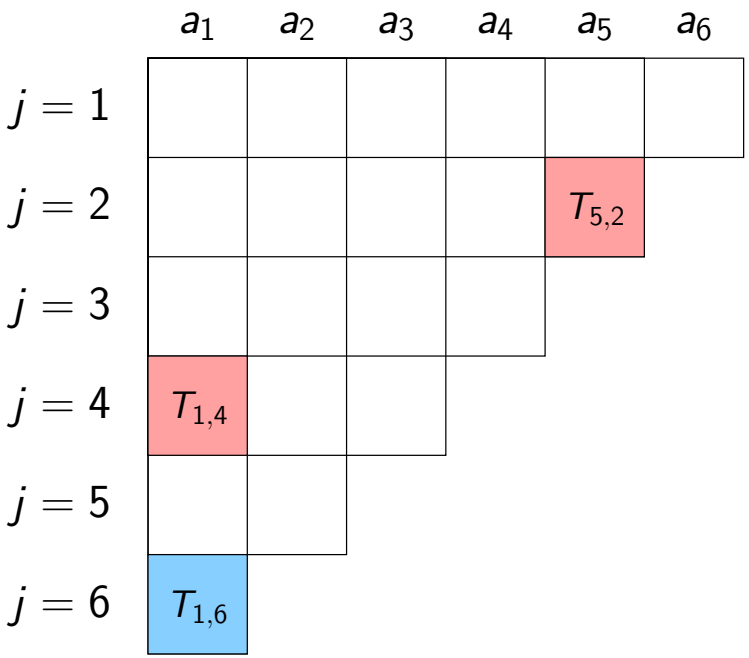


$$x = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \,|\, a_6$$

$$(A \to BC) \in P,$$

$$B \in T_{1,5},\ C \in T_{6,1} \Rightarrow A \in T_{1,6}$$

Der CYK-Algorithmus

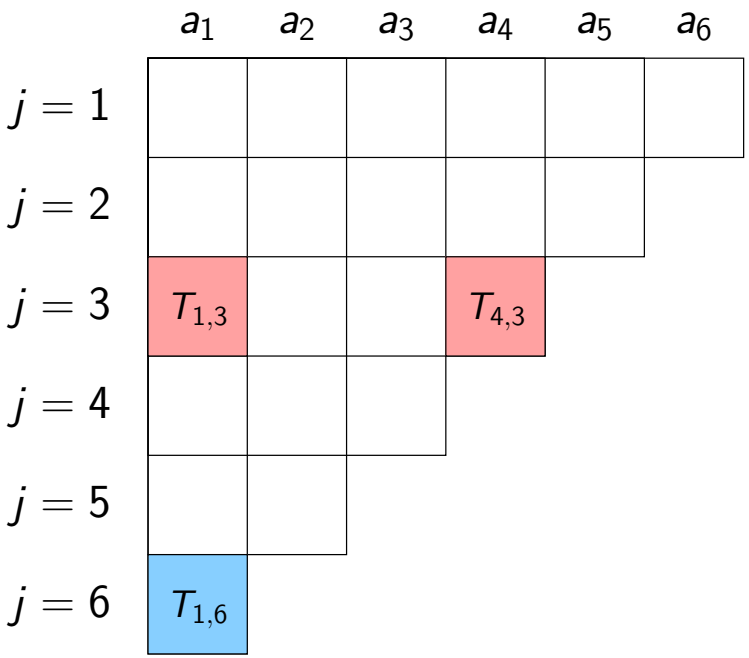


$x = a_1 a_2 a_3 a_4 \,|\, a_5 a_6$

$(A \to BC) \in P$,

$B \in T_{1,4}$, $C \in T_{5,2} \Rightarrow A \in T_{1,6}$

Der CYK-Algorithmus

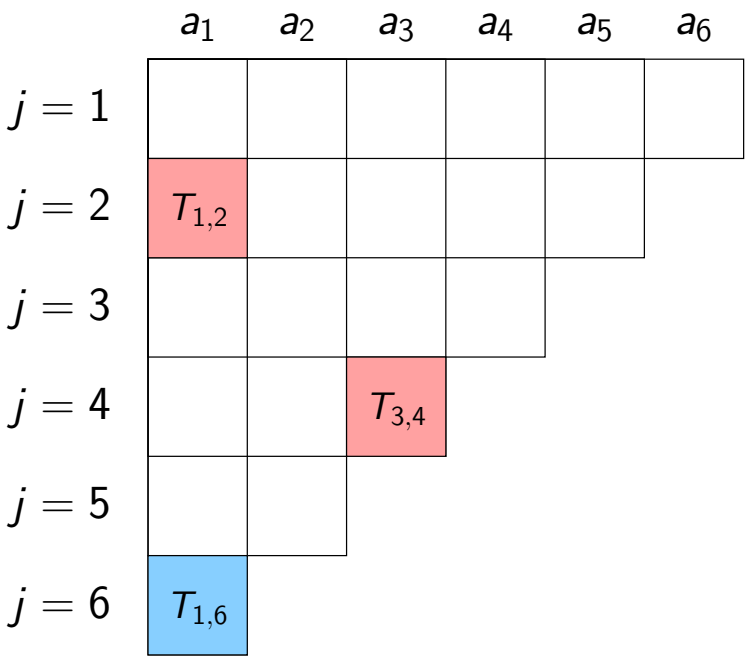


$$x = a_1 a_2 a_3 \,|\, a_4 a_5 a_6$$

$$(A \to BC) \in P,$$

$$B \in T_{1,3},\ C \in T_{4,3} \Rightarrow A \in T_{1,6}$$

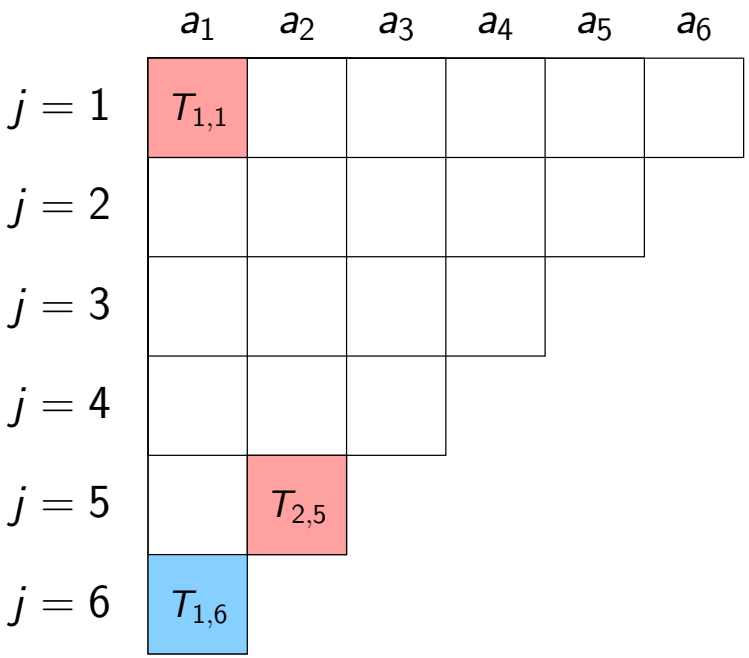
Der CYK-Algorithmus



$$x = a_1 a_2 \,|\, a_3 a_4 a_5 a_6$$

$$(A \to BC) \in P,$$
$$B \in T_{1,2},\ C \in T_{3,4} \Rightarrow A \in T_{1,6}$$

Der CYK-Algorithmus



$x = a_1 \,|\, a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$

$(A \to BC) \in P$,

$B \in T_{1,1}$, $C \in T_{2,5} \Rightarrow A \in T_{1,6}$

Der CYK-Algorithmus

Beispiel 1: Betrachte eine Grammatik für die Sprache $L = \{a^k b^k c^j \mid k, j > 0\}$ mit folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} S &\to AB \\ A &\to ab \mid aAb \\ B &\to c \mid cB \end{aligned}$$

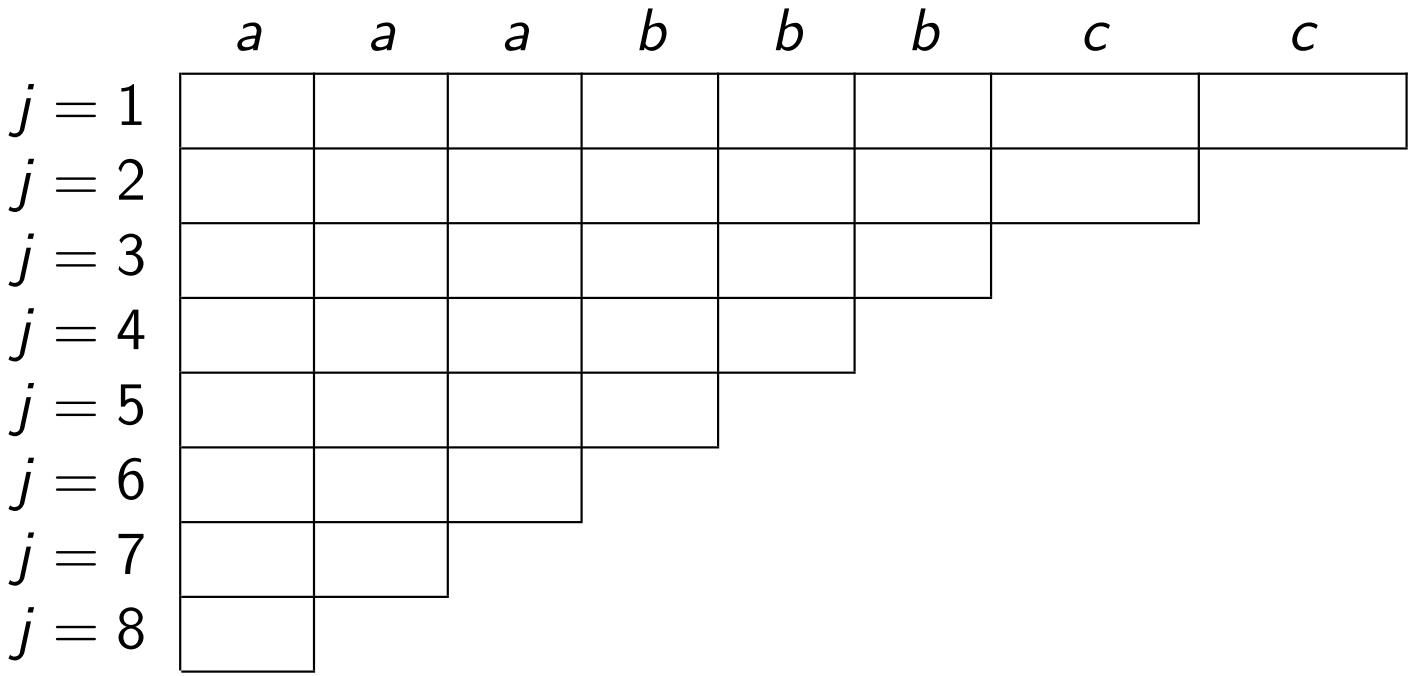
Wir zeigen mittels des CYK-Algorithmus, dass $aaabbbcc \in L$ gilt.

Zunächst müssen wir die Grammatik in Chomsky-Normalform überführen.

Dies ergibt die Grammatik auf der nächsten Folie.

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$



Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$								
$j=3$								
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$							
$j=3$								
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$						
$j=3$								
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A					
$j=3$								
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$				
$j=3$								
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j = 1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j = 2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j = 3$								
$j = 4$								
$j = 5$								
$j = 6$								
$j = 7$								
$j = 8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=3$								
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j = 1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j = 2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j = 3$								
$j = 4$								
$j = 5$								
$j = 6$								
$j = 7$								
$j = 8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$							
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$							
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$						
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$						
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C					
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C					
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$				
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$				
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$								
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j = 1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j = 2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j = 3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j = 4$								
$j = 5$								
$j = 6$								
$j = 7$								
$j = 8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$							
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$							
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$							
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	$\emptyset$						
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j = 1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j = 2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j = 3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j = 4$	$\emptyset$	$\emptyset$						
$j = 5$								
$j = 6$								
$j = 7$								
$j = 8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A						
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$					
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$					
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$					
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$								
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$							
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$							
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$							
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$							
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C						
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C						
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C						
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C						
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$					
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$					
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$					
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$					
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$								
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	$\emptyset$							
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	$\emptyset$							
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	$\emptyset$							
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	$\emptyset$							
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A							
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$						
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$						
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$						
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$						
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$						
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$								
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j = 1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j = 2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j = 3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j = 4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j = 5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j = 6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j = 7$	S							
$j = 8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S							
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S							
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S							
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S							
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S							
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$								

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$	$\emptyset$							

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_a A_b \mid A_a C \qquad A_b \to b$$
$$C \to A A_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_c B$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j = 1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j = 2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j = 3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j = 4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j = 5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j = 6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j = 7$	S	$\emptyset$						
$j = 8$	S							

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$	S							

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$	S							

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$	S							

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$	S							

Der CYK-Algorithmus

$$S \to AB \qquad A_a \to a$$
$$A \to A_aA_b \mid A_aC \qquad A_b \to b$$
$$C \to AA_b \qquad A_c \to c$$
$$B \to c \mid A_cB$$

	a	a	a	b	b	b	c	c
$j=1$	A_a	A_a	A_a	A_b	A_b	A_b	B, A_c	B, A_c
$j=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B	
$j=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$j=4$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$j=5$	$\emptyset$	C	$\emptyset$	$\emptyset$				
$j=6$	A	$\emptyset$	$\emptyset$					
$j=7$	S	$\emptyset$						
$j=8$	S							

Der CYK-Algorithmus

Beispiel 2: Betrachte eine Grammatik mit folgenden Produktionen:

$$
\begin{aligned}
S &\to AD \mid FG \\
D &\to SE \mid BC \\
E &\to BC \\
F &\to AF \mid a \\
G &\to BG \mid CG \mid b \\
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c
\end{aligned}
$$

Frage: Sei $x = aabcbc$. Gilt $x \in L$?

Der CYK-Algorithmus

Hier ist die Tabelle, die sich mit dem CYK-Algorithmus ergibt (Sie sollten dies überprüfen):

	a	a	b	c	b	c
$j = 1$	A, F	A, F	B, G	C	B, G	C
$j = 2$	F	S	D, E	G	D, E	
$j = 3$	S	S	G			
$j = 4$		S				
$j = 5$	S	D				
$j = 6$	S					

Der CYK-Algorithmus

Komplexität des CYK-Algorithmus

Sei $n = |x|$ die Länge des Wortes, das untersucht wird. Die Größe der Grammatik wird als konstant angesehen. Dann gilt:

- $O(n^2)$ Tabellenfelder müssen ausgefüllt werden.
- Für das Ausfüllen jedes Tabellenfeldes müssen bis zu $O(n)$ andere Felder betrachtet werden.

  (Für $T_{1,n}$ müssen beispielsweise die Felder $T_{1,n-1}$, $T_{n,1}$ und $T_{1,n-2}$, $T_{n-1,2}$ und ... und $T_{1,1}$, $T_{2,n-1}$ betrachtet werden. Insgesamt $n-1$ Paare von Feldern.)

Daher ergibt sich insgesamt als Zeitkomplexität: $O(n^3)$.

Die Zeitkomplexität ist noch polynomiell, aber für das Parsen großer Programme eigentlich nicht mehr geeignet.

Kellerautomaten

Was ist ein geeignetes Automatenmodell für kontextfreie Sprachen?

Analog zu regulären Sprachen suchen wir hier ein Automatenmodell für kontextfreie Sprachen.

Antwort: Kellerautomaten, d.h., Automaten, die mit einem zusätzlichen Keller ausgestattet sind.

Nutzen eines solchen Automatenmodells

Manche Konstruktionen und Verfahren lassen sich besser mit Hilfe des Automatenmodells durchführen (anstatt auf Grammatiken).

- Wortproblem: Wir werden herausfinden, dass das Wortproblem unter bestimmten Umständen effizienter als in Zeit $O(n^3)$ gelöst werden kann.
- Abschlusseigenschaften: Abschluss der kontextfreien Sprachen unter Schnitt mit regulären Sprachen lässt sich gut mit Kellerautomaten zeigen.

Kellerautomaten

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{a_1 a_2 \cdots a_n \$ a_n \cdots a_2 a_1 \mid a_i \in \Delta\}$$

mit $\Sigma = \Delta \cup \{\$\}$, $\$ \notin \Delta$.

Ein endlicher Automat kann diese Sprache deshalb nicht erkennen, weil er sich keine beliebig langen Wörter der Form $a_1 a_2 \cdots a_n$ "merken" kann.

Er müsste sich aber solche Wörter merken, um die Übereinstimmung mit dem Wortteil nach dem $ zu überprüfen.

Kellerautomaten

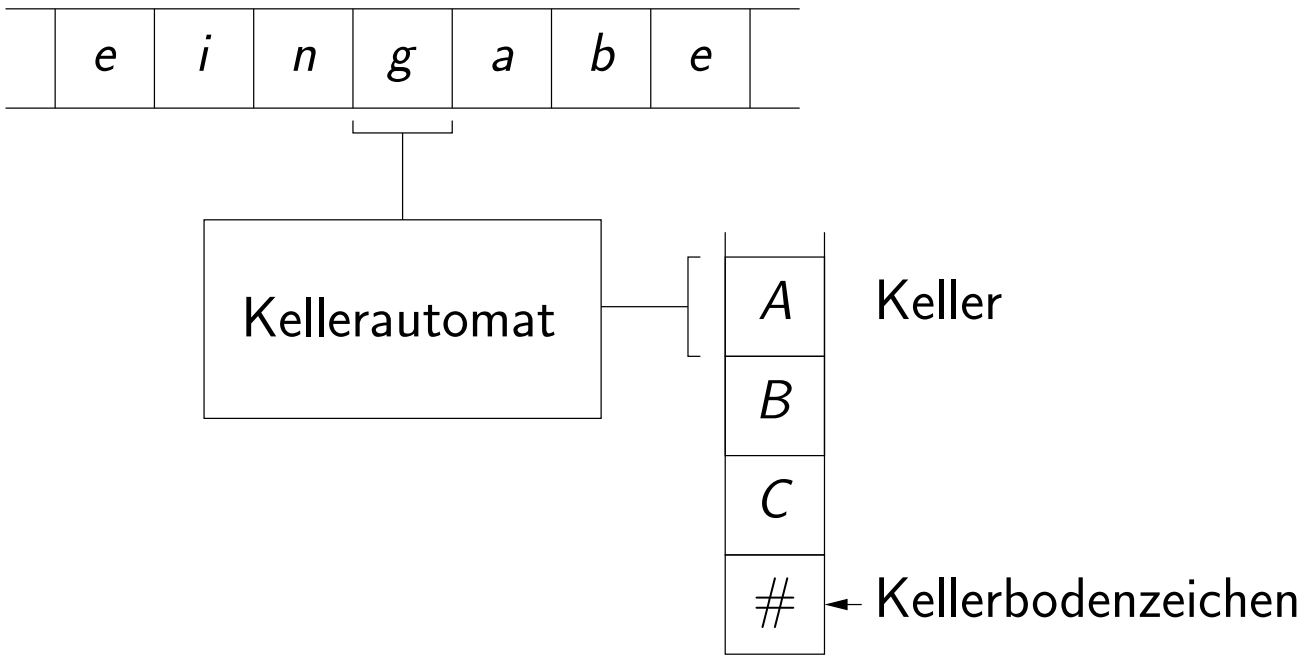
Um ein Automatenmodell für kontextfreie Sprachen zu erhalten,

- führen wir daher einen Keller oder Pushdown-Speicher ein, auf dem sich eine beliebig lange Sequenz von Zeichen befinden darf.
- Beim Einlesen eines neuen Zeichens darf das oberste Zeichen des Kellers gelesen und folgendermaßen verändert werden:
  - Entweder bleibt der Keller unverändert oder
  - das oberste Zeichen des Kellers wird entfernt und durch eine (evtl. leere) Sequenz von Zeichen ersetzt.

  An anderen Stellen darf der Keller nicht gelesen oder verändert werden.

Kellerautomaten

Schematische Darstellung eines Kellerautomaten:



Kellerautomaten

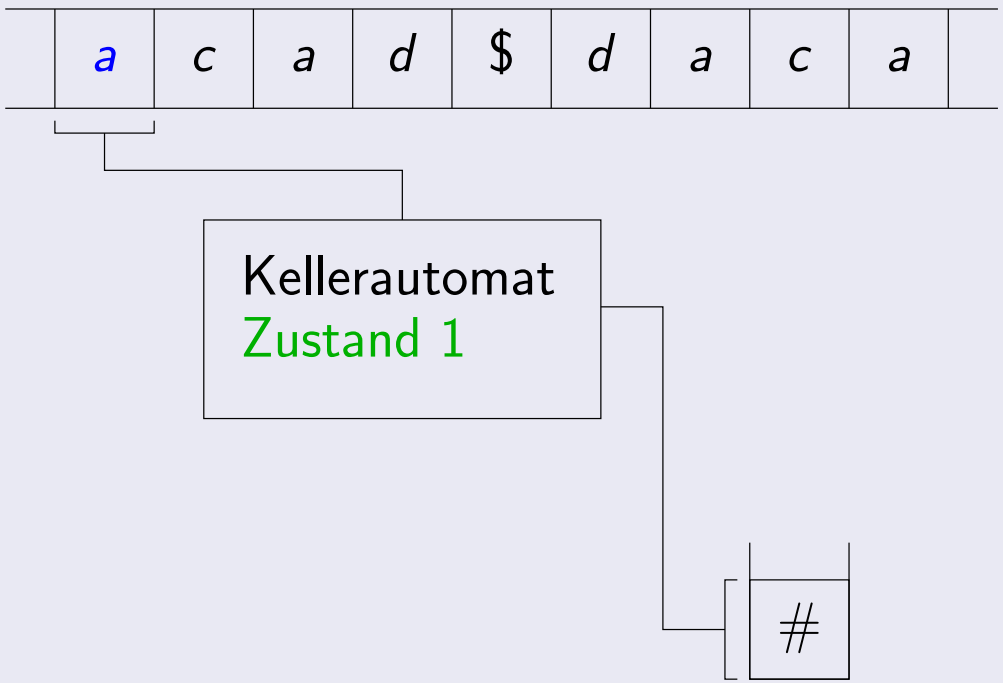
Sei $\Delta = \{a, b, c, d\}$ und $L = \{a_1 a_2 \cdots a_n \$ a_n \cdots a_2 a_1 \mid a_i \in \Delta\}$.

Ein Kellerautomat erkennt diese Sprache folgendermaßen:

- Ein Wort w wird von links nach rechts eingelesen.
- Solange \$ noch nicht erreicht ist, wird jedes eingelesene Symbol als Großbuchstabe auf den Keller gelegt ($a \rightsquigarrow A$, $b \rightsquigarrow B$, ...).
- Wenn \$ eingelesen wird, bleibt der Keller unverändert.
- Anschließend wird für jedes neu eingelesene Zeichen überprüft, ob der passende Großbuchstabe auf dem Keller liegt. Dieser wird dann entfernt.
- Falls irgendwann keine Übereinstimmung festgestellt wird, blockiert der Kellerautomat.
- Falls immer Übereinstimmung herrscht, wird schließlich auch das Kellerbodenzeichen # entfernt, und der Automat akzeptiert mit leerem Keller.

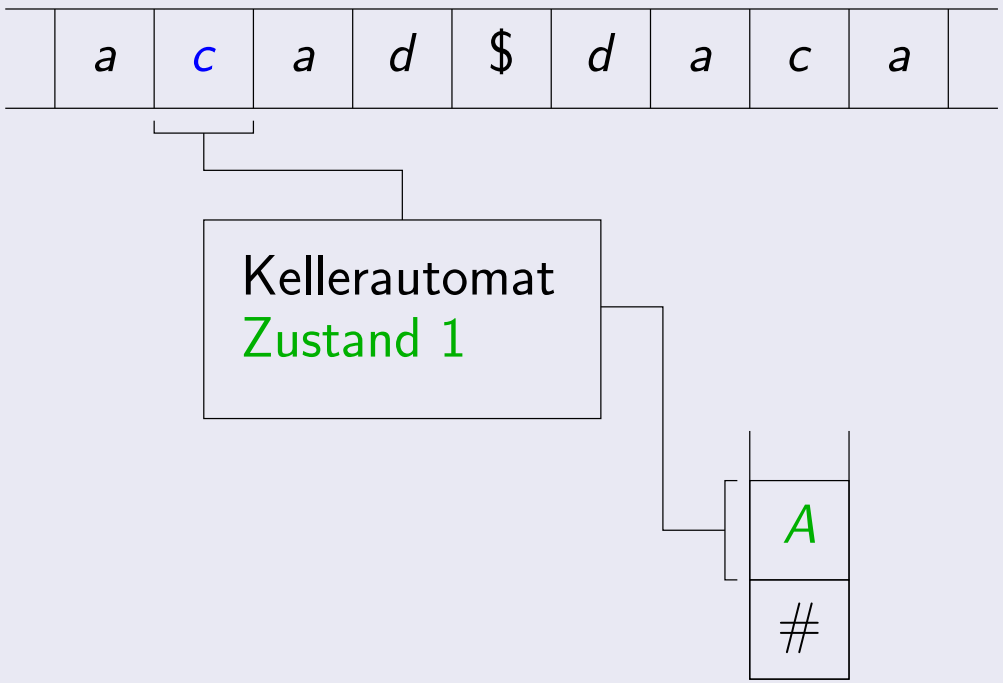
Kellerautomaten

Simulation



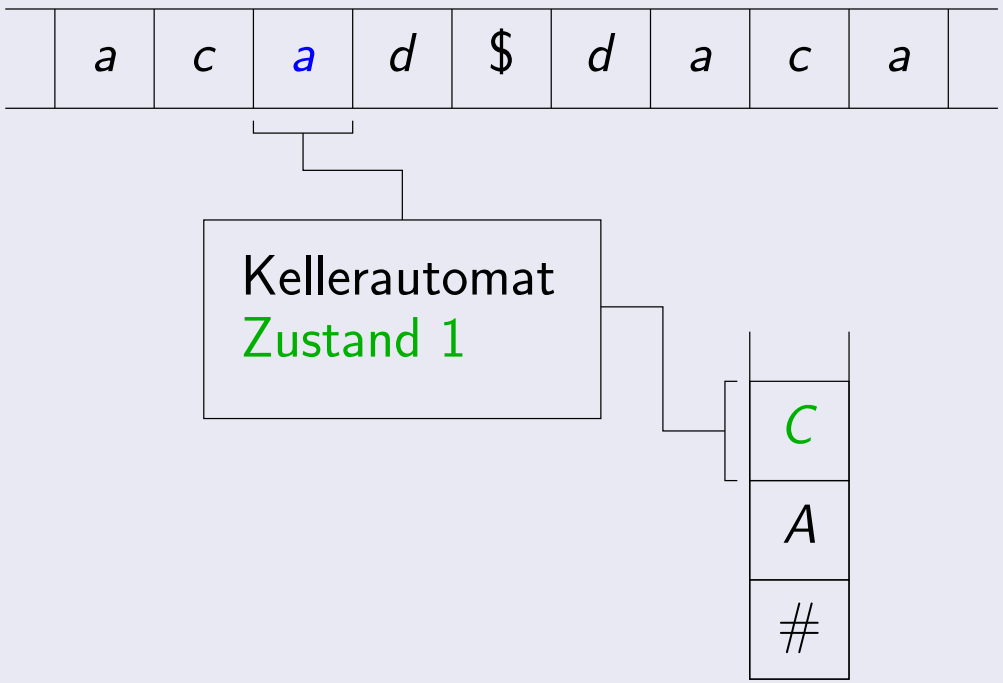
Kellerautomaten

Simulation



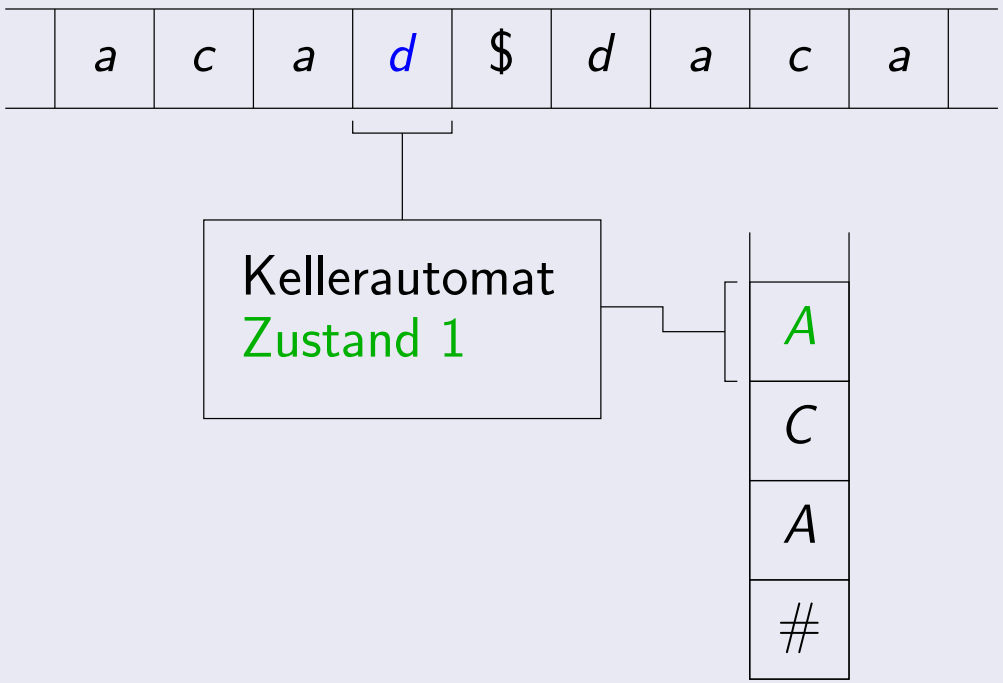
Kellerautomaten

Simulation



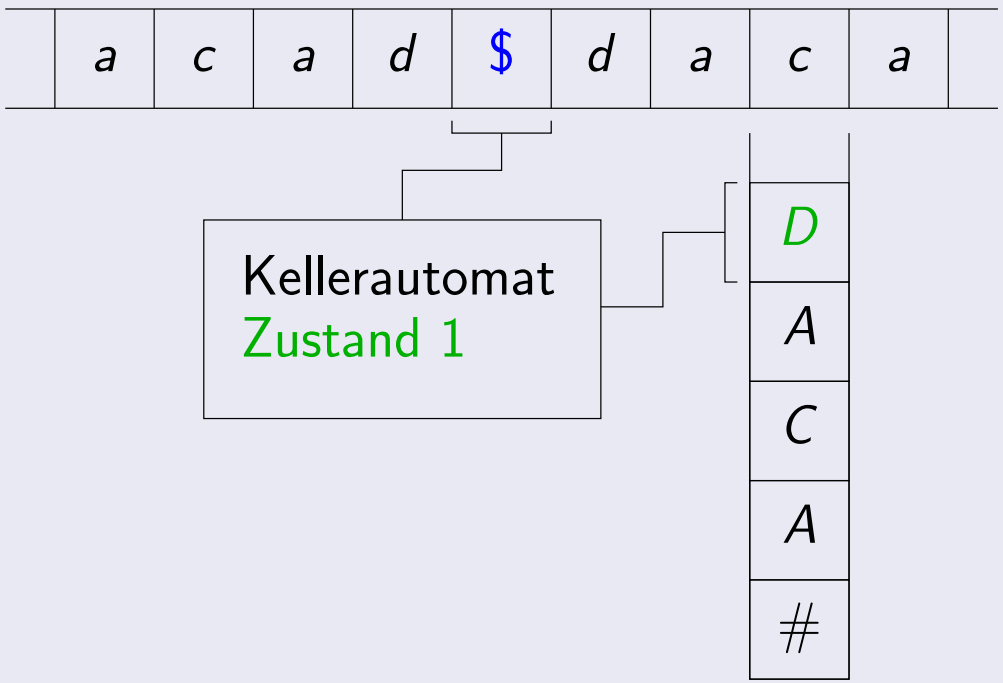
Kellerautomaten

Simulation



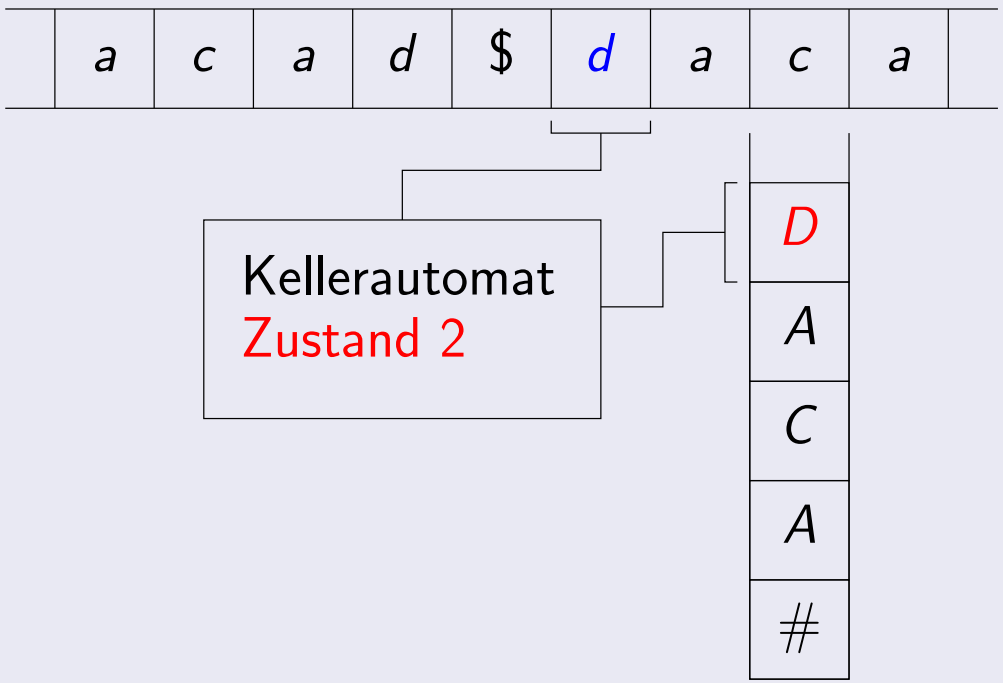
Kellerautomaten

Simulation



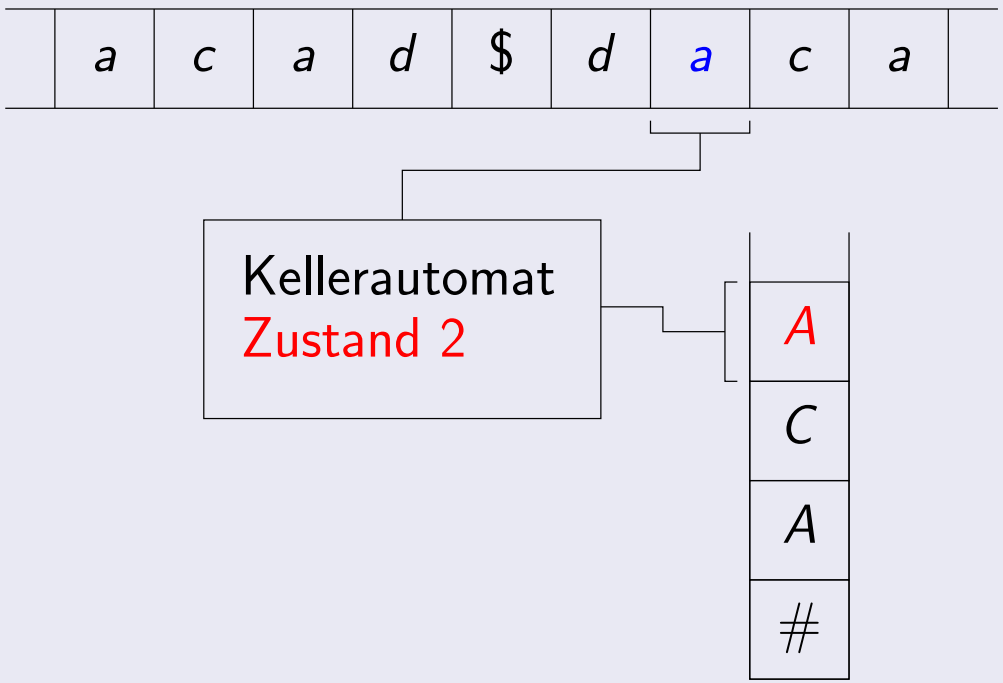
Kellerautomaten

Simulation



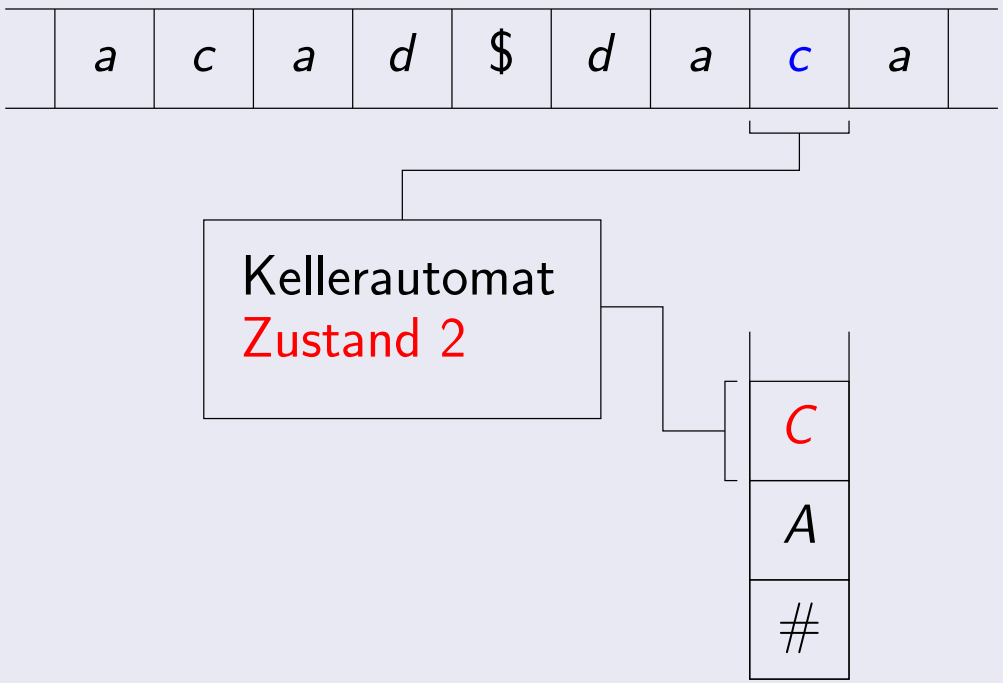
Kellerautomaten

Simulation



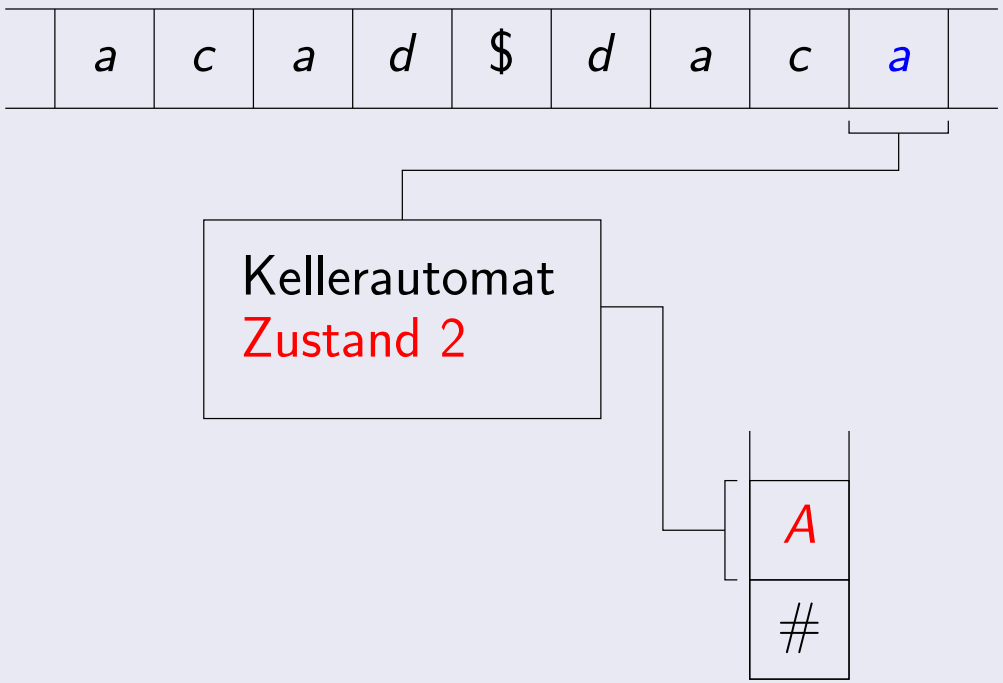
Kellerautomaten

Simulation



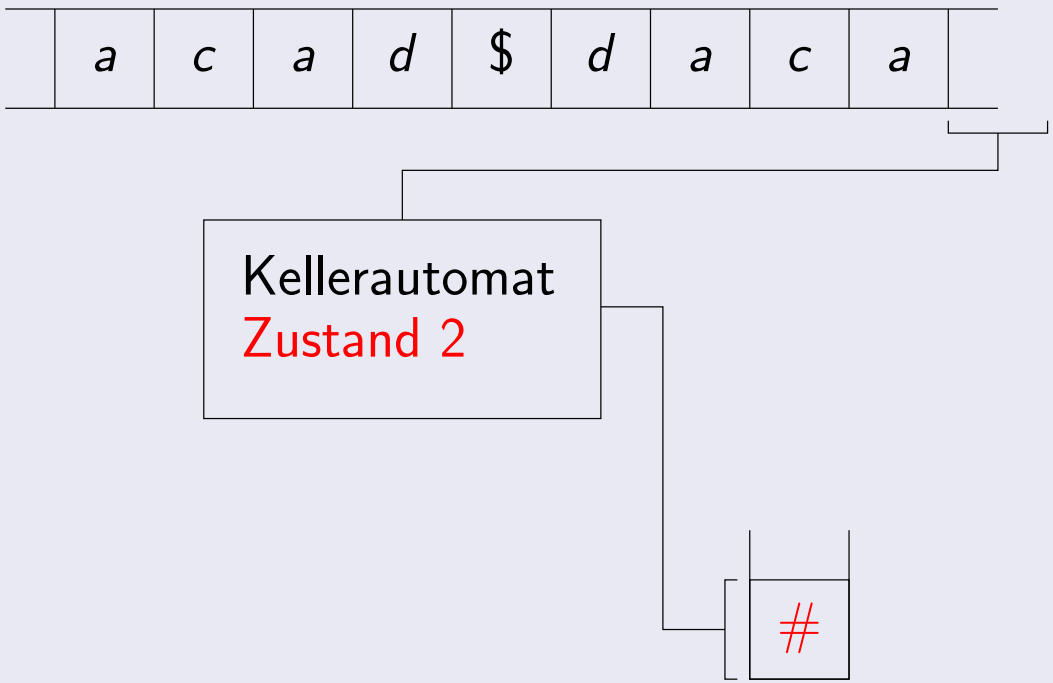
Kellerautomaten

Simulation



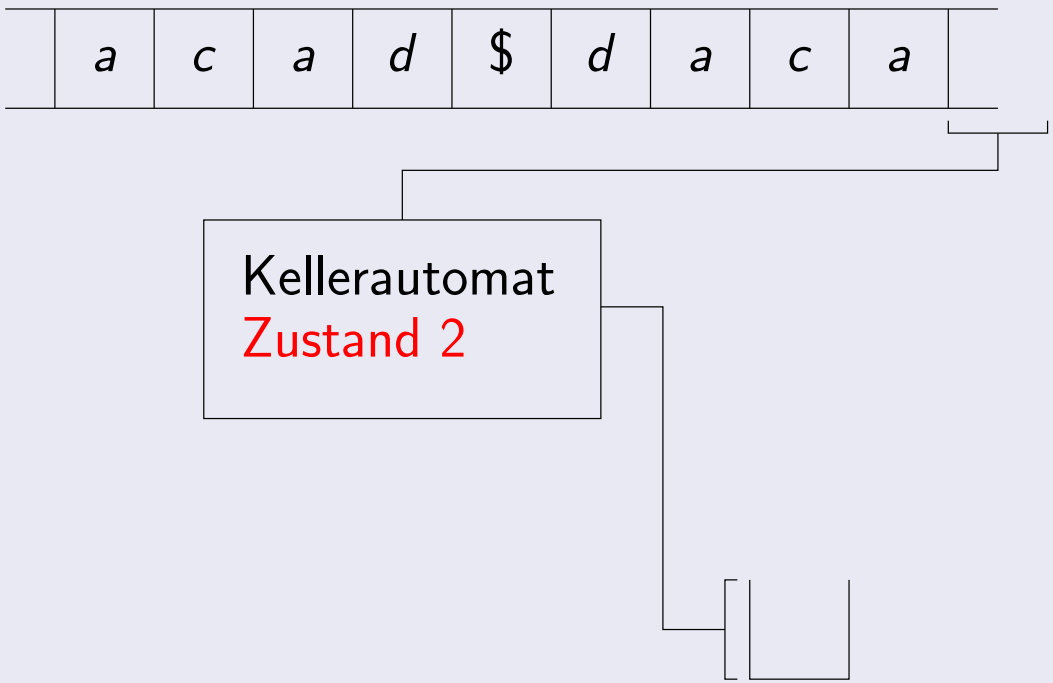
Kellerautomaten

Simulation



Kellerautomaten

Simulation



Kellerautomaten

Definition (Kellerautomat)

Ein nichtdeterministischer Kellerautomat M ist ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, wobei

- Z die endliche Menge der Zustände,
- Σ das endliche Eingabealphabet (mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$),
- Γ das endliche Kelleralphabet,
- $z_0 \in Z$ der Startzustand,
- $\# \in \Gamma$ das unterste Kellerzeichen oder Kellerbodenzeichen, und
- $\delta\colon Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Z \times \Gamma^*}$ die Überführungsfunktion ist, wobei $\delta(z, a, A)$ für alle $(z, a, A) \in Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ endlich sein muss.

Abkürzung: KA oder PDA (pushdown automaton).

Kellerautomaten

- Wir betrachten die Überführungsfunktion

$$\delta\colon Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Z \times \Gamma^*}.$$

Falls $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$, so bedeutet das:

- wenn im Zustand z das Eingabesymbol a gelesen wird und das Zeichen A als oberstes auf dem Keller liegt, dann
- wird A vom Keller entfernt und durch $B_1 \cdots B_k$ ersetzt (B_1 liegt zuoberst) und der Automat geht in den Zustand z' über.

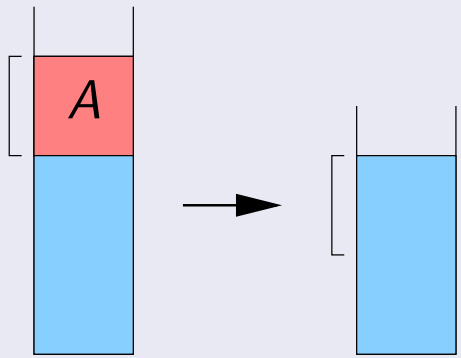
Es kann auch $a = \varepsilon$ gelten. In diesem Fall wird kein Eingabesymbol eingelesen. Wir sprechen dann von einer ε-Transition.

Kellerautomaten

Wir betrachten verschiedene Fälle von Werten der Überführungsfunktion δ:

$(z', \varepsilon) \in \delta(z, a, A)$

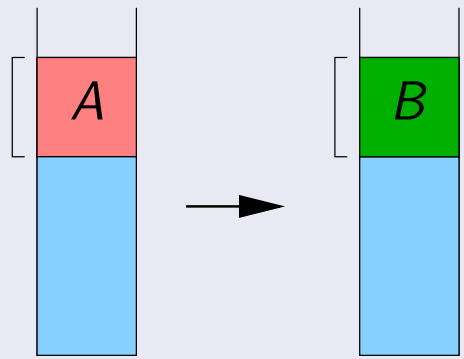
- Zeichen a wird gelesen.
- Zustand ändert sich von z nach z'.
- Symbol A wird vom Keller entfernt:



Kellerautomaten

$(z', B) \in \delta(z, a, A)$

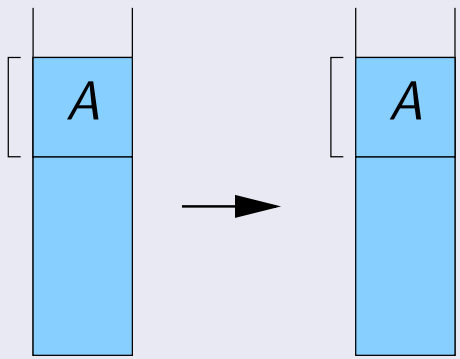
- Zeichen a wird gelesen.
- Zustand ändert sich von z nach z'.
- Symbol A auf dem Keller wird durch B ersetzt:



Kellerautomaten

$(z', A) \in \delta(z, a, A)$

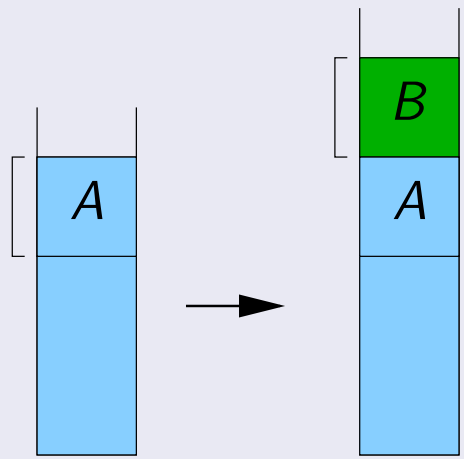
- Zeichen a wird gelesen.
- Zustand ändert sich von z nach z'.
- Symbol A bleibt auf dem Keller:



Kellerautomaten

$(z', BA) \in \delta(z, a, A)$

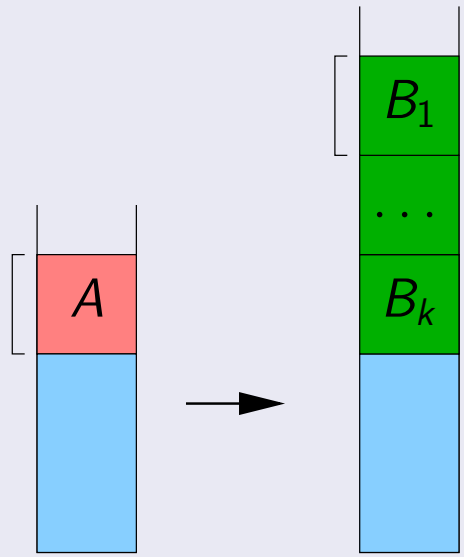
- Zeichen a wird gelesen.
- Zustand ändert sich von z nach z'.
- Symbol B wird neu auf den Keller gelegt:



Kellerautomaten

$(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$

- Zeichen a wird gelesen.
- Zustand ändert sich von z nach z'.
- Symbol A wird durch mehrere neue Symbole ersetzt:



Kellerautomaten

- Zu Beginn einer jeden Berechnung enthält der Keller genau das Kellerbodenzeichen #.
- Der Keller ist nicht beschränkt und kann beliebig wachsen. Es gibt unendlich viele mögliche Kellerinhalte, das unterscheidet Kellerautomaten von endlichen Automaten.
- Die von uns betrachteten Kellerautomaten akzeptieren immer mit leerem Keller (in diesem Fall gibt es auch keine Übergangsmöglichkeiten mehr). Es gibt aber auch andere Varianten von Kellerautomaten, die mit Endzustand akzeptieren.

Kellerautomaten

Beispiel:

PDA für $L = \{a_1 a_2 \cdots a_n \$ a_n \cdots a_2 a_1 \mid n \geq 0, a_1, \ldots, a_n \in \{a, b\}\}$:

$$M = (\{z_1, z_2\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B\}, \delta, z_1, \#),$$

wobei δ folgendermaßen definiert ist (wir schreiben $(z, a, A) \to (z', x)$, falls $(z', x) \in \delta(z, a, A)$).

$$\begin{array}{lll}
(z_1, a, \#) \to (z_1, A\#) & (z_1, a, A) \to (z_1, AA) & (z_1, a, B) \to (z_1, AB) \\
(z_1, b, \#) \to (z_1, B\#) & (z_1, b, A) \to (z_1, BA) & (z_1, b, B) \to (z_1, BB) \\
(z_1, \$, \#) \to (z_2, \#) & (z_1, \$, A) \to (z_2, A) & (z_1, \$, B) \to (z_2, B) \\
(z_2, a, A) \to (z_2, \varepsilon) & (z_2, b, B) \to (z_2, \varepsilon) & (z_2, \varepsilon, \#) \to (z_2, \varepsilon)
\end{array}$$

Kellerautomaten

Definition (Konfiguration eines PDA)

Eine Konfiguration eines PDA ist ein Tripel $k \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.

Bedeutung der Komponenten von $k = (z, w, \gamma) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$:

- $z \in Z$ ist der aktuelle Zustand des PDA.
- $w \in \Sigma^*$ ist der noch zu lesende Teil der Eingabe.
- $\gamma \in \Gamma^*$ ist der aktuelle Kellerinhalt. Dabei steht das oberste Kellerzeichen ganz links.

Kellerautomaten

Übergänge zwischen Konfigurationen ergeben sich aus der Überführungsfunktion δ:

Definition (Konfigurationsübergänge eines PDA)

Es gilt

$$(z, aw, A\gamma) \vdash (z', w, B_1 \cdots B_k \gamma),$$

falls $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$, und es gilt

$$(z, w, A\gamma) \vdash (z', w, B_1 \cdots B_k \gamma),$$

falls $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, \varepsilon, A)$.

Hierbei ist $\gamma \in \Gamma^*$ eine beliebige Folge von Kellersymbolen, $A, B_1, \ldots, B_k \in \Gamma$, $w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, und $z, z' \in Z$.

Im ersten Fall wird ein Zeichen der Eingabe gelesen, im zweiten jedoch nicht.

Kellerautomaten

Wir definieren $\vdash^*$ als die reflexive and transitive Hülle von $\vdash$.

Damit kann jetzt die von einem PDA akzeptierte Sprache definiert werden:

Definition (Akzeptierte Sprache eines PDA)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein PDA. Dann ist die von M akzeptierte Sprache:

$$N(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (z_0, x, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } z \in Z\}.$$

Das heißt die akzeptierte Sprache enthält alle Wörter, mit Hilfe derer es möglich ist, den Keller vollständig zu leeren.

Da Kellerautomaten jedoch nicht-deterministisch sind, kann es auch Berechnungen für dieses Wort geben, die den Keller nicht leeren.

Kellerautomaten

Folgende Folge von Konfigurationsübergängen zeigt, dass der Kellerautomat von Folie 263 das Wort $ab\$ba$ akzeptiert.

$$
\begin{aligned}
(z_1, ab\$ba, \#) &\vdash (z_1, b\$ba, A\#) && \text{wegen } (z_1, a, \#) \to (z_1, A\#) \\
&\vdash (z_1, \$ba, BA\#) && \text{wegen } (z_1, b, A) \to (z_1, BA) \\
&\vdash (z_2, ba, BA\#) && \text{wegen } (z_1, \$, B) \to (z_2, B) \\
&\vdash (z_2, a, A\#) && \text{wegen } (z_2, b, B) \to (z_2, \varepsilon) \\
&\vdash (z_2, \varepsilon, \#) && \text{wegen } (z_2, a, A) \to (z_2, \varepsilon) \\
&\vdash (z_2, \varepsilon, \varepsilon) && \text{wegen } (z_2, \varepsilon, \#) \to (z_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Kellerautomaten

Ein weiteres **Beispiel**: ein PDA für die Sprache

$$L = \{a_1 a_2 \cdots a_n a_n \cdots a_2 a_1 \mid n \geq 0, a_1, \ldots, a_n \in \{a, b\}\}.$$

Idee: anstatt auf das Zeichen \$ zu warten, kann sich der Automat nicht-deterministisch entscheiden, in den Zustand z_2 (= Keller abbauen) überzugehen, sobald das aktuelle Zeichen auf dem Band mit dem Zeichen auf dem Keller übereinstimmt (oder wenn der Keller leer ist).

Kellerautomaten

Veränderte Überführungsfunktion δ (3. Zeile ist geändert):

$$
\begin{array}{lll}
(z_1, a, \#) \to (z_1, A\#) & (z_1, a, A) \to (z_1, AA) & (z_1, a, B) \to (z_1, AB) \\
(z_1, b, \#) \to (z_1, B\#) & (z_1, b, A) \to (z_1, BA) & (z_1, b, B) \to (z_1, BB) \\
(z_1, \varepsilon, \#) \to (z_2, \#) & (z_1, a, A) \to (z_2, \varepsilon) & (z_1, b, B) \to (z_2, \varepsilon) \\
(z_2, a, A) \to (z_2, \varepsilon) & (z_2, b, B) \to (z_2, \varepsilon) & (z_2, \varepsilon, \#) \to (z_2, \varepsilon)
\end{array}
$$

Anmerkung: dieser Kellerautomat ist (im Gegensatz zum vorherigen) nicht-deterministisch, d.h., eine Konfiguration kann mehrere mögliche Nachfolger haben. (Und möglicherweise enden einige Konfigurationsfolgen als Sackgassen und führen nicht dazu, dass der Keller geleert wird.)

Beispiel: Kellerautomat erhält die Eingabe *aabbaa*.

Kellerautomaten

Folgende Folge von Konfigurationsübergängen zeigt, dass diese Eingabe akzeptiert wird:

$$
\begin{aligned}
(z_1, aabbaa, \#) &\vdash (z_1, abbaa, A\#) && \text{wegen } (z_1, a, \#) \to (z_1, A\#) \\
&\vdash (z_1, bbaa, AA\#) && \text{wegen } (z_1, a, A) \to (z_1, AA) \\
&\vdash (z_1, baa, BAA\#) && \text{wegen } (z_1, b, A) \to (z_1, BA) \\
&\vdash (z_2, aa, AA\#) && \text{wegen } (z_1, b, B) \to (z_2, \varepsilon) \\
&\vdash (z_2, a, A\#) && \text{wegen } (z_2, a, A) \to (z_2, \varepsilon) \\
&\vdash (z_2, \varepsilon, \#) && \text{wegen } (z_2, a, A) \to (z_2, \varepsilon) \\
&\vdash (z_2, \varepsilon, \varepsilon) && \text{wegen } (z_2, \varepsilon, \#) \to (z_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Kellerautomaten

Beachte: Es gibt auch viele andere mögliche Berechnungen, bei denen der Keller am Ende nicht leer ist, wie z.B.

$$
\begin{aligned}
(z_1, aabbaa, \#) &\vdash (z_1, abbaa, A\#) && \text{wegen } (z_1, a, \#) \to (z_1, A\#) \\
&\vdash (z_1, bbaa, AA\#) && \text{wegen } (z_1, a, A) \to (z_1, AA) \\
&\vdash (z_1, baa, BAA\#) && \text{wegen } (z_1, b, A) \to (z_1, BA) \\
&\vdash (z_1, aa, BBAA\#) && \text{wegen } (z_1, b, B) \to (z_1, BB) \\
&\vdash (z_1, a, ABBAA\#) && \text{wegen } (z_1, a, B) \to (z_1, AB) \\
&\vdash (z_1, \varepsilon, AABBAA\#) && \text{wegen } (z_1, a, A) \to (z_1, AA)
\end{aligned}
$$

Solche Berechnungen ändern jedoch nichts mehr an der Tatsache, dass das Wort *aabbaa* akzeptiert wird.

Hierfür genügt die Existenz der einen Berechnung auf der vorherigen Folie bei der nach Lesen der Eingabe der Keller leer ist.

Kellerautomaten

Wir müssen nun noch zeigen, dass man mit Kellerautomaten wirklich genau die kontextfreien Sprachen akzeptieren kann.

Satz (kontextfreie Grammatiken $\rightarrow$ Kellerautomaten)

Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es einen PDA M mit $L(G) = N(M)$.

Kellerautomaten

Beweisidee:

1. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass G in Greibach-Normalform ist.

2. Wir simulieren eine Ableitung von G, indem wir den Keller zur Abspeicherung derjenigen Variablen, für die noch etwas abgeleitet werden muss, verwenden.

3. Eine Produktion $A \to aA_1 \cdots A_n$ wird wie folgt simuliert:

   Falls a das nächste Eingabesymbol ist und auf dem Keller oben A liegt, kann A durch $A_1 \cdots A_n$ ersetzt werden.

4. Wenn die komplette Eingabe gelesen wurde, und der Keller gleichzeitig leer ist, dann wurde eine komplette Ableitung für das Eingabewort simuliert.

Kellerautomaten

Formaler: Zunächst nehmen wir an, dass $\varepsilon \notin L(G)$.

Dann können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Greibach-Normalform ist.

Wir definieren den PDA

$$M = (\{z\}, \Sigma, V, \delta, z, S)$$

mit folgender Überführungsfunktion: Für $A \in V$ und $a \in \Sigma$ sei

$$\delta(z, a, A) = \{(z, A_1 \cdots A_m) \mid (A \to aA_1 \cdots A_m) \in P\}$$

Beachte:

- M hat nur einen Zustand (z).
- M hat keine ε-Transitionen.
- Das Startsymbol S von G ist das Kellerbodenzeichen.
- Da G in Greibach-Normalform ist, sind alle Produktionen in P von der Form $A \to aA_1 \cdots A_m$ mit $m \geq 0$, $A, A_1, \ldots, A_m \in V$ und $a \in \Sigma$.

Kellerautomaten

Behauptung: Für alle $u \in \Sigma^*$ und $\gamma \in V^*$ gilt:

$$(z, u, \gamma) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \iff \gamma \Rightarrow_G^* u.$$

Beweis: Induktion über $|u|$.

Induktionsanfang: $u = \varepsilon$.

Dann gilt

$$(z, \varepsilon, \gamma) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \iff \gamma = \varepsilon \iff \gamma \Rightarrow_G^* \varepsilon.$$

Kellerautomaten

Induktionsschritt: Sei $u = av$ mit $a \in \Sigma$, $v \in \Sigma^*$.

Falls $\gamma = \varepsilon$ gilt weder $\gamma \Rightarrow_G^* av$ noch $(z, av, \gamma) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Sei nun $\gamma = A\gamma'$ mit $A \in V$ und $\gamma' \in V^*$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& A\gamma' \Rightarrow_G^* av \\
\iff \quad & \exists (A \to aA_1 \cdots A_m) \in P : A_1 \cdots A_m \gamma' \Rightarrow_G^* v \\
\iff \quad & \exists (A \to aA_1 \cdots A_m) \in P : (z, v, A_1 \cdots A_m \gamma') \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \\
\iff \quad & \exists (z, A_1 \cdots A_m) \in \delta(z, a, A) : (z, v, A_1 \cdots A_m \gamma') \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \\
\iff \quad & (z, av, A\gamma') \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Kellerautomaten

Aus der obigen Behauptung folgt:

$$w \in L(G) \iff S \Rightarrow_G^* w \iff (z, w, S) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \iff w \in N(M).$$

Falls $\varepsilon \in L(G)$ gilt, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass bis auf die Produktion $S \to \varepsilon$ alle Produktionen von G in Greibach-Normalform sind, und S auf keiner rechten Seite von G vorkommt.

Wir fügen dann zu dem auf Folie 274 definierten PDA noch $\delta(z, \varepsilon, S) = \{(z, \varepsilon)\}$ (die einzige ε-Transition) hinzu.

Diese kann nur ganz zu Beginn einer Berechnung $(z, w, S) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ angewendet werden (dann muss $w = \varepsilon$ gelten).

Es gilt dann wieder wie gewünscht $L(G) = N(M)$. □

Kellerautomaten

Alternative Konstruktion:

Wir können auch direkt aus einer beliebigen kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen PDA M mit $L(G) = N(M)$ konstruieren.

Definiere den PDA $M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$ mit einem Zustand z und Kelleralphabet $V \cup \Sigma$.

Überführungsfunktion δ:

$$\delta(z, \varepsilon, A) = \{(z, \alpha) \mid (A \to \alpha) \in P\} \text{ für } A \in V$$
$$\delta(z, a, a) = \{(z, \varepsilon)\} \text{ für } a \in \Sigma$$

Mit Produktionen vom ersten Typ werden Ableitungsschritte auf dem Keller ohne Lesen der Eingabe simuliert.

Mit Produktionen vom zweiten Typ wird ein Symbol der Eingabe mit dem Keller verglichen.

Beachte: M hat ε-Produktionen.

Kellerautomaten

Wir betrachten folgende kontextfreie Grammatik mit dem zweielementigen Alphabet $\Sigma = \{[,]\}$, die korrekte Klammerstrukturen erzeugt:

$$S \to [S]S \mid \varepsilon$$

Aufgabe: wandle diese Grammatik in einen Kellerautomaten um und akzeptiere damit das Wort $[\,[\,]\,]\,[\,]$.

Wir verwenden die Konstruktion von Folie 278:

- Zustandsmenge $= \{z\}$
- Kelleralphabet $= \{[,], S\}$
- Kellerbodenzeichen $= S$
- Überführungsfunktion:

$$\begin{aligned} \delta(z, \varepsilon, S) &= \{(z, \varepsilon), (z, [S]S)\} \\ \delta(z, a, a) &= \{(z, \varepsilon)\} \text{ für } a \in \{[,]\} \end{aligned}$$

Links finden Sie eine Ableitung des Worts $[\,[\,]\,]\,[\,]$ mit der Grammatik, rechts steht die entsprechende Berechnung des obigen Kellerautomatens:

Kellerautomaten

$$
\begin{array}{ll}
S \Rightarrow [S]S & (z, [[]][], S) \vdash (z, [[]][], [S]S) \\
 & \vdash (z, []][], S]S) \\
\Rightarrow [[S]S]S & \vdash (z, []][], [S]S]S) \\
 & \vdash (z,]][], S]S]S) \\
\Rightarrow [[]S]S & \vdash (z,]][],]S]S) \\
 & \vdash (z,][], S]S) \\
\Rightarrow [[]]S & \vdash (z,][],]S) \\
 & \vdash (z, [], S) \\
\Rightarrow [[]][S]S & \vdash (z, [], [S]S) \\
 & \vdash (z,], S]S) \\
\Rightarrow [[]][]S & \vdash (z,],]S) \\
 & \vdash (z, \varepsilon, S) \\
\Rightarrow [[]][] & \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)
\end{array}
$$

Kellerautomaten

Nun geht es darum zu zeigen, dass es zu jedem Kellerautomaten eine entsprechende kontextfreie Grammatik gibt.

Das ist die schwierigere Richtung.

Satz (Kellerautomaten $\rightarrow$ kontextfreie Grammatiken)

Zu jedem Kellerautomaten M gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $N(M) = L(G)$.

Kellerautomaten

Beweisidee:

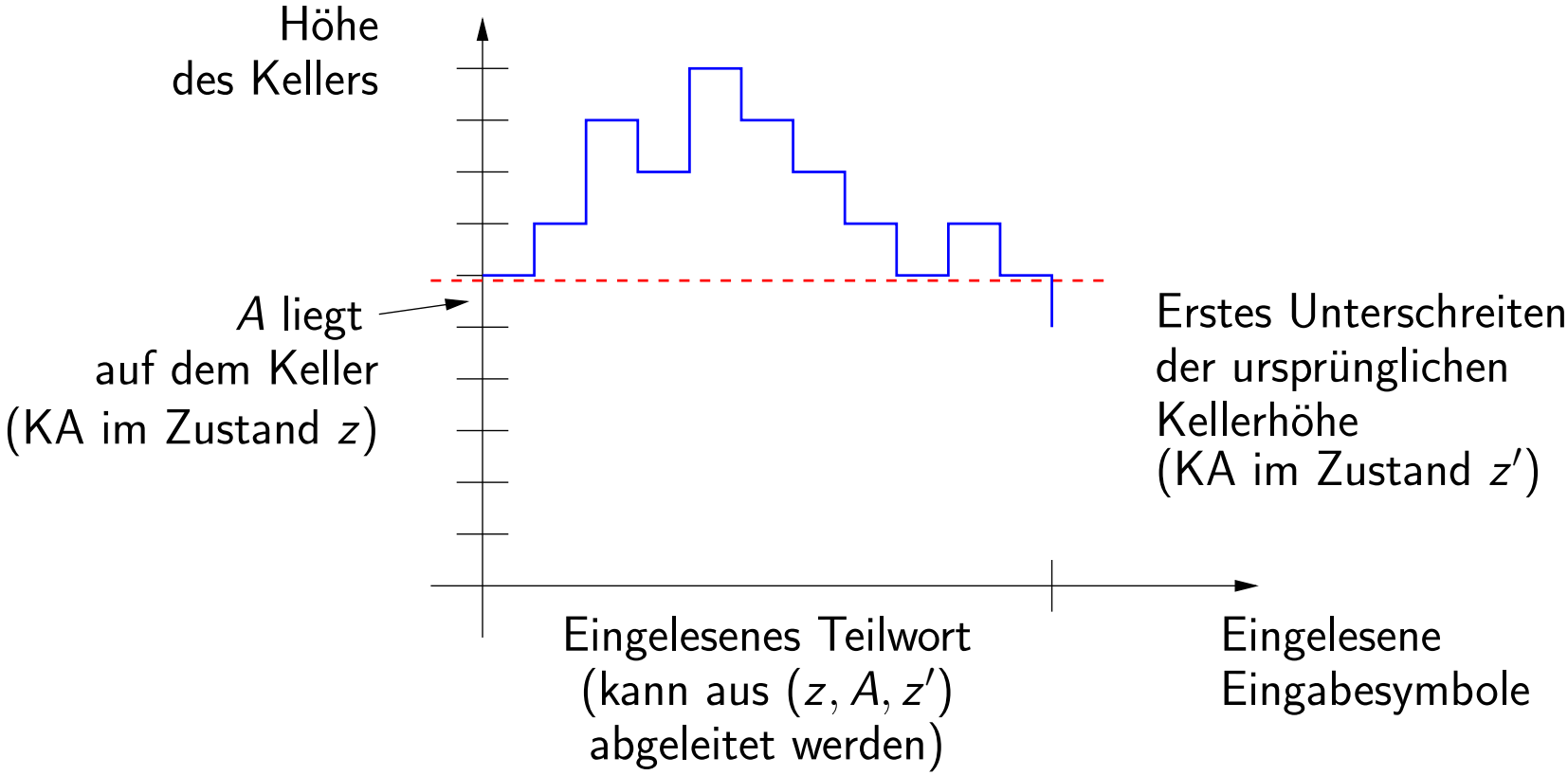
1. Wir wollen beschreiben, welche Wörter man durch Abbauen eines bestimmten Kellersymbols akzeptieren kann. Die vom Automaten akzeptierte Sprache besteht nämlich aus allen Wörtern, die man durch Abbauen von # erzeugen kann.

   "Abbauen" bedeutet: zwischendurch dürfen weitere Symbole auf den Keller gelegt werden, aber zuletzt muss der Keller um dieses eine Symbol kürzer geworden sein.

2. Die zu erstellende kontextfreie Grammatik besitzt Variablen der Form (z, A, z') mit der Bedeutung:

   Aus (z, A, z') kann man genau die Wörter ableiten, die der Kellerautomat einliest, wenn er im Zustand z startet, A vom Keller abbaut und im Zustand z' aufhört.

Kellerautomaten



Zwischendurch kann A durch ein anderes Symbol ersetzt werden. Die ursprüngliche Kellerhöhe wird jedoch nicht unterschritten.

Kellerautomaten

Formale Bedeutung der Symbole (z, A, z'):

$$(z_1, A, z_2) \Rightarrow^* x \quad \Longleftrightarrow \quad (z, x, A) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

Gegeben sei ein Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$.

Wir definieren eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ wie folgt (siehe nächste Folie):

Kellerautomaten

- Variablen: $V = \{S\} \cup Z \times \Gamma \times Z$
  (Eigene Startvariable und Variablen der Form (z, A, z'))
- Produktionen haben folgende Form:

$$S \to (z_0, \#, z) \qquad \text{für alle } z \in Z$$
(Entfernen des Kellerbodenzeichens)

$$(z, A, z') \to a \qquad \text{falls } (z', \varepsilon) \in \delta(z, a, A)$$
(Symbol A kann – bei Einlesen von $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ – sofort entfernt werden)

$$(z, A, z') \to a\,(z_1, B_1, z_2)(z_2, B_2, z_3) \cdots (z_k, B_k, z') \quad \text{für alle } (z_1, B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A),\ z_2, \ldots, z_k \in Z,\ k \geq 1$$
(Symbol A wird durch $B_1 \ldots B_k$ ersetzt, diese müssen über Zwischenzustände $z_1, \ldots, z_k$ entfernt werden.)

Kellerautomaten

Beispiel: Wir betrachten den Kellerautomaten

$$M = (\{z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, z_1, \#)$$

mit folgender Überführungsfunktion δ:

$$\begin{array}{lcl} (z_1, \varepsilon, \#) & \to & (z_2, \varepsilon) \\ (z_1, a, \#) & \to & (z_1, AA) \\ (z_1, a, A) & \to & (z_1, AAA) \\ (z_1, b, A) & \to & (z_2, \varepsilon) \\ (z_2, b, A) & \to & (z_2, \varepsilon) \end{array}$$

Es gilt: $N(M) = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$.

Aufgabe: Umwandlung von M in eine kontextfreie Grammatik.

Kellerautomaten

$$
\begin{aligned}
S &\to (z_1, \#, z_1) \\
S &\to (z_1, \#, z_2) \\
(z_1, \#, z_2) &\to \varepsilon \\
(z_1, A, z_2) &\to b \\
(z_2, A, z_2) &\to b \\
(z_1, \#, z_i) &\to a(z_1, A, z_j)(z_j, A, z_i) \\
(z_1, A, z_i) &\to a(z_1, A, z_j)(z_j, A, z_k)(z_k, A, z_i)
\end{aligned}
$$

Die letzten beiden Produktionen sind dabei für alle $i, j, k \in \{1, 2\}$ vorhanden.

Insgesamt hat die Grammatik also 17 Produktionen.

Kellerautomaten

Bemerkung zu den Umwandlungen
"Kontextfreie Grammatik $\leftrightarrow$ Kellerautomat":

Zu jedem Kellerautomaten M gibt es immer einen äquivalenten Kellerautomaten M' mit nur einem Zustand und ohne ε-Transitionen (falls $\varepsilon \notin N(M)$).

1. Wandele M zunächst in eine kontextfreie Grammatik G um.
2. Wandle dann G in eine kontextfreie Grammatik G' in Greibach-Normalform um.
3. Wandle schließlich G' in einen Kellerautomaten M' um.

Es wird ausgenutzt, dass bei der Umwandlung einer Grammatik (in Greibach-Normalform) in einen Kellerautomaten immer nur Automaten mit einem Zustand und ohne ε-Transitionen konstruiert werden.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Wir betrachten nun eine Unterklasse von Kellerautomaten, die dazu verwendet werden können, Sprachen deterministisch und damit effizient zu erkennen.

Definition (deterministischer Kellerautomat)

Ein deterministischer Kellerautomat M ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$, wobei

- $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein Kellerautomat ist,
- $E \subseteq Z$ eine Menge von Endzuständen ist, und
- die Überführungsfunktion $\delta \colon Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Z \times \Gamma^*}$ in folgendem Sinne deterministisch ist:

  Für alle $z \in Z$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ gilt:

$$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1.$$

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Unterschiede zwischen Kellerautomaten und deterministischen Kellerautomaten:

- Deterministische Kellerautomaten haben eine Menge von Endzuständen und akzeptieren mit Endzustand – und nicht mit leerem Keller.

  Bei deterministischen Kellerautomaten ist dies ein Unterschied, für nicht-deterministische Kellerautomaten sind beide Akzeptanzmöglichkeiten gleichwertig.

- Für jeden Zustand z und jedes Kellersymbol A gilt:
  - entweder gibt es höchstens einen ε-Übergang
  - oder es gibt für jedes Alphabetsymbol höchstens einen Übergang.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Konfigurationen und Übergänge zwischen Konfiguration bleiben jedoch gleich definiert.

Konfigurationsfolgen werden jedoch zu linearen Ketten, d.h., es gibt immer höchstens eine Folgekonfiguration.

Diese Tatsache wird dann für die effiziente Lösung des Wortproblems ausgenutzt.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Definition (akzeptierte Sprache bei det. Kellerautomaten)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein deterministischer PDA. Dann ist die von M akzeptierte Sprache:

$$D(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (z_0, x, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \gamma) \text{ für ein } z \in E, \gamma \in \Gamma^*\}.$$

Vergleiche mit der Definition für nicht-deterministische Kellerautomaten!

Bei deterministischen Kellerautomaten ist folgendes anders:

- Der erreichte Zustand z muss ein Endzustand sein.
- Es darf ein Kellerinhalt γ übrigbleiben.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Definition (deterministisch kontextfreie Sprachen)

Eine Sprache heißt deterministisch kontextfrei genau dann, wenn sie von einem deterministischen PDA akzeptiert wird.

Beispiele:

- Die Sprache $L = \{a_1 a_2 \dots a_n \$ a_n \dots a_2 a_1 \mid a_i \in \Delta\}$ ist deterministisch kontextfrei (siehe den entsprechenden PDA).
- Die Sprache $L = \{a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1 \mid a_i \in \Delta\}$ ist jedoch nicht deterministisch kontextfrei (ohne Beweis).

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Beachte: A priori folgt aus der Definition von deterministisch kontextfreien Sprachen nicht sofort, dass deterministisch kontextfreie Sprachen auch kontextfrei sind (Akzeptanz mit Endzuständen versus leeren Keller).

Dies ist aber der Fall: Aus einem deterministischen PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ konstruieren wir einen (nicht-deterministischen) PDA $M' = (Z \cup \{z_0', z_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\#'\}, \delta', z_0', \#')$, wobei gilt:

$$\delta'(z_0', \varepsilon, \#') = \{(z_0, \#\#')\}$$

$$\delta'(z, a, A) = \begin{cases} \delta(z, a, A) & \text{falls } (z \in Z \setminus E \text{ oder } a \in \Sigma),\ A \in \Gamma \\ \delta(z, a, A) \cup \{(z_f, \varepsilon)\} & \text{falls } z \in E, a = \varepsilon, A \in \Gamma \end{cases}$$

$$\delta(z, \varepsilon, \#') = \{(z_f, \varepsilon)\} \text{ falls } z \in E$$

$$\delta(z_f, \varepsilon, A) = \{(z_f, \varepsilon)\} \text{ falls } A \in \Gamma \cup \{\#'\}$$

Dann gilt: $N(M') = D(M)$.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Die Konstruktion auf der vorherigen Folie zeigt auch, wie man einen (nicht-deterministischen) PDA, der mit Endzuständen akzeptiert, in einen (nicht-deterministischen) PDA, der mit leeren Keller akzeptiert, umwandelt.

Umgekehrt kann man einen (nicht-deterministischen) PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, der mit leeren Keller akzeptiert, in einen (nicht-deterministischen) PDA, der mit Endzuständen akzeptiert, wie folgt umwandeln:

Sei $M' = (Z \cup \{z_0', z_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\#'\}, \delta', z_0', \#', \{z_f\})$, wobei gilt:

$$\begin{aligned}
\delta'(z_0', \varepsilon, \#') &= \{(z_0, \#\#')\} \\
\delta'(z, a, A) &= \delta(z, a, A) \text{ falls } z \in Z,\ a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in \Gamma \\
\delta(z, \varepsilon, \#') &= \{(z_f, \varepsilon)\} \text{ für alle } z \in Z
\end{aligned}$$

Dann gilt: $N(M') = N(M)$.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Weitere Bemerkungen:

- Effizienz: Mit Hilfe von deterministischen Kellerautomaten hat man jetzt ein Verfahren zur Lösung des Wortproblems, das die Komplexität $O(n)$ hat. Hierbei ist n die Länge des Eingabewortes.

  Dazu lässt man einfach den Automaten auf dem Wort arbeiten und überprüft ob man in einen Endzustand gelangt.

- Deterministisch kontextfreie Grammatiken: Da die Syntax von Sprachen einfacher mit Hilfe von Grammatiken als mit Hilfe von Kellerautomaten definiert werden kann, ist es notwendig, die zu deterministischen Kellerautomaten passende Klasse von deterministisch kontextfreien Grammatiken zu definieren.

  Da dies nicht ganz einfach ist, gibt es hierzu mehrere Ansätze. Der bekannteste davon sind die sogenannten $LR(k)$-Grammatiken (siehe Compilerbau und Syntaxanalyse).

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Die Abschlusseigenschaften bei deterministisch kontextfreien Sprachen sehen etwas anders aus als bei kontextfreien Sprachen.

Satz (Abschluss unter Komplement)

Wenn L eine deterministisch kontextfreie Sprache ist, dann ist auch $\overline{L} = \Sigma^* \backslash L$ deterministisch kontextfrei.

Wir verzichten hier auf den recht technischen Beweis.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Kein Abschluss unter Schnitt

Es gibt deterministisch kontextfreie Sprachen L_1 und L_2, so dass $L_1 \cap L_2$ nicht deterministisch kontextfrei ist.

Begründung:

Die Beispiel-Sprachen aus dem Argument, dass die kontextfreien Sprachen unter Schnitt nicht abgeschlossen sind, sind sogar deterministisch kontextfrei, ihr Schnitt jedoch noch nicht einmal kontextfrei:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^j b^k c^k \mid j \geq 0, k \geq 0\} \\ L_2 &= \{a^k b^k c^j \mid j \geq 0, k \geq 0\} \end{aligned}$$

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Kein Abschluss unter Vereinigung

Es gibt deterministisch kontextfreie Sprachen L_1 und L_2, so dass $L_1 \cup L_2$ nicht deterministisch kontextfrei ist.

Begründung:

Aus dem Abschluss unter Vereinigung und Komplement würde auch der Abschluss unter Schnitt folgen (wegen $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$).

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Man hat jedoch sehr wohl Abschluss unter Schnitt mit regulären Sprachen:

Satz (Abschluss unter Schnitt mit regulären Sprachen)

Sei L eine deterministisch kontextfreie Sprache und R eine reguläre Sprache. Dann ist $L \cap R$ eine deterministisch kontextfreie Sprache.

Beweisidee: (analog der Kreuzprodukt-Konstruktion für NFAs)

Sei $M = (Z_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, z_0^1, \#, E_1)$ ein deterministischer PDA für L.

Sei $A = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_0^2, E_2)$ ein DFA für R.

Konstruktion eines deterministischen PDA M' für $L \cap R$:

$$M' = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \Gamma, \delta', (z_0^1, z_0^2), \#, E_1 \times E_2).$$

Hierbei ist die Überführungsfunktion δ wie folgt definiert ist:

Deterministisch kontextfreie Sprachen

$$\begin{aligned}
\delta'((z_1, z_2), a, A) &= \{((z_1', z_2'), B_1 \cdots B_k) \mid (z_1', B_1 \cdots B_k) \in \delta_1(z_1, a, A), \\
&\qquad\qquad \delta_2(z_2, a) = z_2', a \in \Sigma\} \\
\delta'((z_1, z_2), \varepsilon, A) &= \{((z_1', z_2), B_1 \cdots B_k) \mid (z_1', B_1 \cdots B_k) \in \delta_1(z_1, \varepsilon, A)\}
\end{aligned}$$

Beachte: Die so definierte Überführungsfunktion erfüllt die in der Definition von deterministischen PDAs gestellten Voraussetzungen. □

Nochmal Abschlusseigenschaften

Mit der gleichen Technik und unter Ausnutzung der Tatsache, dass für allgemeine (nicht-deterministische) Kellerautomaten die Akzeptanz mit leerem Keller gleichmächtig zur Akzeptanz mit Endzustand ist, lässt sich auch folgendes zeigen:

Satz (Abschluss unter Schnitt mit regulären Sprachen II)

Sei L eine kontextfreie Sprache und R eine reguläre Sprache. Dann ist $L \cap R$ eine kontextfreie Sprache.

Entscheidbarkeit

Wir betrachten nun noch Probleme für kontextfreie Sprachen und stellen fest, ob sie entscheidbar sind, d.h., ob es entsprechende Algorithmen zu ihrer Lösung gibt.

Wortproblem für eine kontextfreie Sprache L

Gegeben $w \in \Sigma^*$.
Gilt $w \in L$?

Ist die kontextfreie Sprache L durch eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform gegeben, so kann das Wortproblem mit dem CYK-Algorithmus in $O(|w|^3)$ Zeit gelöst werden.

Ist L deterministisch kontextfrei und durch einen deterministischen PDA gegeben, so kann das Wortproblem für L sogar in Zeit $O(n)$ gelöst werden.

Entscheidbarkeit

Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen

Gegeben eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$.
Gilt $L(G) = \emptyset$?

Bestimme die Menge

$$W = \{A \in V \mid \exists w \in \Sigma^* : A \Rightarrow_G^* w\}$$

aller produktiven Variablen (Variablen mit denen ein Terminalwort abgeleitet werden kann):

$W := \{A \in V \mid \exists w \in \Sigma^* : (A \to w) \in P\}$
$W' := \emptyset$
while $W' \neq W$ do
  $W' := W$
  $W := W \cup \{A \in V \mid \exists w \in (\Sigma \cup W)^* : (A \to w) \in P\}$
endwhile

Dann gilt: $L(G) \neq \emptyset \iff S \in W$.

Entscheidbarkeit

Endlichkeitsproblem für kontextfreie Sprachen

Gegeben eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$.
Ist $L(G)$ endlich?

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass G in Chomsky-Normalform ist.

Wir definieren einen Graphen (W, E) auf der Menge W der produktiven Variablen (siehe vorherige Folie) mit folgender Kantenrelation:

$$E = \{(A, B) \in W \times W \mid \exists C \in W : (A \to BC) \in P \text{ oder } (A \to CB) \in P\}$$

Behauptung: $|L(G)| = \infty \iff \exists A \in W : (S, A) \in E^*$ und $(A, A) \in E^+$.

Beachte: $(B, C) \in E^*$ (bzw. $(B, C) \in E^+$) bedeutet, dass es einen Pfad (bzw. einen nicht leeren Pfad, d.h. einen Pfad mit mindestens einer Kante) von B nach C in der binären Relation E gibt. $(B, B) \in E^*$ gilt immer!

Entscheidbarkeit

"$\Leftarrow$": Sei $A \in W$ so, dass $(S, A) \in E^*$ und $(A, A) \in E^+$.

Dann existieren in G Ableitungen der Form:

$$S \Rightarrow_G^* uAy, \qquad A \Rightarrow_G^+ vAx, \qquad A \Rightarrow_G^* w$$

mit $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$.

Also gilt $S \Rightarrow_G^* uv^i wx^i y \in \Sigma^*$ für alle $i \geq 0$.

Da in der Ableitung $A \Rightarrow_G^+ vAx$ mindestens ein Ableitungsschritt gemacht wird, und G in Chomsky-Normalform ist, muss $vx \neq \varepsilon$ gelten.

Also ist $\{uv^i wx^i y \mid i \geq 0\}$ unendlich, weshalb $L(G)$ unendlich ist.

Entscheidbarkeit

"$\Rightarrow$": Sei $L(G)$ unendlich.

Sei n die Konstante aus dem Pumping-Lemma ($= 2^{|V|}$) und sei $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$ (so ein Wort z gibt es, wenn $L(G)$ unendlich ist!)

Im Beweis des Pumping-Lemmas haben wir gesehen, dass eine Variable A existiert mit Ableitungen $S \Rightarrow_G^* uAy$, $A \Rightarrow_G^+ vAx$, und $A \Rightarrow_G^* w$, wobei $z = uvwxy$.

Also ist A produktiv: $A \in W$.

Die Ableitungen $S \Rightarrow^* uAy$ und $A \Rightarrow^+ vAx$ (genauer, der Pfad im Syntaxbaum von der Wurzel S bis zum zweiten Vorkommen von A) zeigen, dass $(S, A) \in E^*$ und $(A, A) \in E^+$ gilt. $\square$

Entscheidbarkeit

Beispiel:

Sei G die Grammatik in Chomsky-Normalform mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to AC \\ A &\to BC \\ B &\to CA \mid b \\ C &\to a \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $W = \{S, A, B, C\}$, d.h. alle Variablen sind produktiv:
Nach Durchlauf i durch die **while-Schleife** (Folie 304) erhalten wir

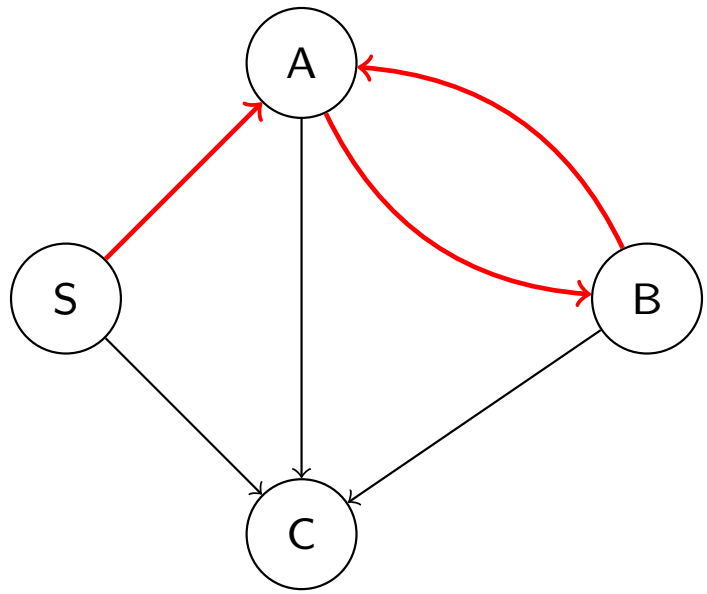
1. für $i = 0$: $W = \{B, C\}$
2. für $i = 1$: $W = \{A, B, C\}$
3. für $i = 2$: $W = \{S, A, B, C\}$

Wegen $S \in W$ gilt $L(G) \neq \emptyset$.

Entscheidbarkeit

Beispiel (Fortsetzung):

Der Graph (W, E) ist dann



Der rote Pfad zeigt, dass $L(G)$ unendlich ist.

Entscheidbarkeit

Unentscheidbarkeit bei kontextfreien Sprachen

Folgende Probleme sind für kontextfreie Sprachen nicht entscheidbar, d.h. man kann zeigen, dass es keinen entsprechenden Algorithmus gibt:

- Äquivalenzproblem: Gegeben zwei kontextfreie Sprachen L_1, L_2. Gilt $L_1 = L_2$?
- Schnittproblem: Gegeben zwei kontextfreie Sprachen L_1, L_2. Gilt $L_1 \cap L_2 = \emptyset$?

Bemerkung: In der Vorlesung **Berechenbarkeit und Logik** werden wir sehen, wie man solche Unentscheidbarkeitsresultate zeigen kann.

Entscheidbarkeit

Das Schnittproblem ist jedoch entscheidbar, wenn von einer der beiden Sprachen L_1, L_2 bekannt ist, dass sie regulär ist, und sie als endlicher Automat gegeben ist.

Algorithmus:

1. In diesem Fall kann ein Kellerautomat M konstruiert werden (Konstruktion siehe weiter oben), der $L_1 \cap L_2$ akzeptiert.
2. Der Kellerautomat M kann dann in eine kontextfreie Grammatik G umgewandelt werden.
3. Durch Bestimmung der produktiven Variablen von G kann dann ermittelt werden, ob S nicht-produktiv ist und damit, ob $L_1 \cap L_2$ leer ist.

Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit bei deterministisch kontextfreien Sprachen

Folgende Probleme sind für deterministisch kontextfreie Sprachen (repräsentiert durch einen deterministischen Kellerautomaten) entscheidbar:

- Wortproblem für eine deterministisch kontextfreie Sprache L: Gegeben $w \in \Sigma^*$. Gilt $w \in L$?

  Mit einem deterministischen Kellerautomaten in $O(|w|)$ Zeit.

- Leerheitsproblem: Gegeben eine deterministisch kontextfreie Sprache L. Gilt $L = \emptyset$?

  Siehe das entsprechende Entscheidungsverfahren für kontextfreie Sprachen.

Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit bei deterministisch kontextfreien Sprachen

- Endlichkeitsproblem: Gegeben eine deterministisch kontextfreie Sprache L. Ist L endlich?

  Siehe das entsprechende Entscheidungsverfahren für kontextfreie Sprachen.
- Äquivalenzproblem: Gegeben zwei deterministisch kontextfreie Sprachen L_1, L_2. Gilt $L_1 = L_2$?

  War lange offen und die Entscheidbarkeit wurde 1997 von Géraud Sénizergues gezeigt.

Entscheidbarkeit

Unentscheidbarkeit bei deterministisch kontextfreien Sprachen

Folgende Probleme sind für deterministisch kontextfreie Sprachen nicht entscheidbar, d.h. man kann zeigen, dass es kein entsprechendes Verfahren gibt:

- Schnittproblem: Gegeben zwei deterministisch kontextfreie Sprachen L_1, L_2. Gilt $L_1 \cap L_2 = \emptyset$?

  Wie bei kontextfreien Sprachen ist dieses Problem jedoch entscheidbar, wenn eine der beiden Sprachen regulär ist.
- Inklusionsproblem: Gegeben zwei deterministisch kontextfreie Sprachen L_1, L_2. Gilt $L_1 \subseteq L_2$?

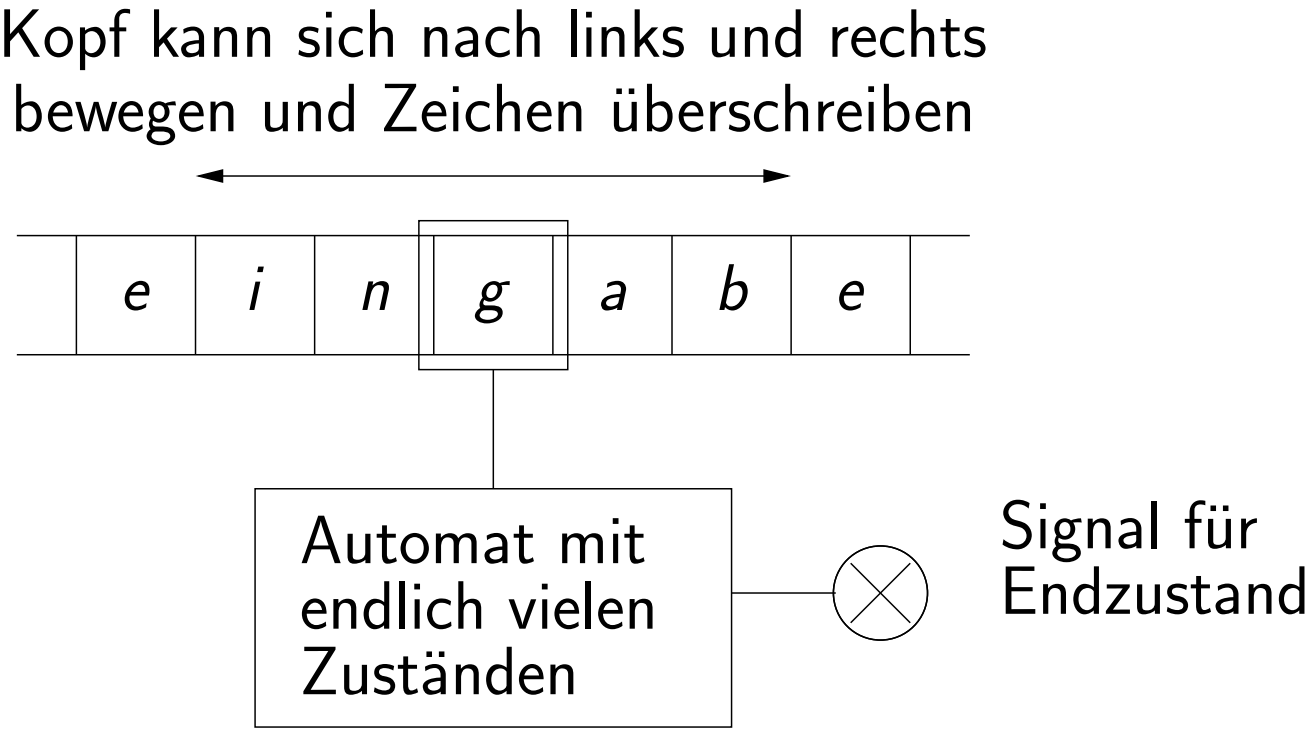
Turingmaschinen

Im Rest der Vorlesung werden wir Maschinemodelle für the Chomsky-0 und Chomsky-1 Sprachen einführen.

- Chomsky-0 Sprachen: Turingmaschinen (benannt nach Alan Turing, 1912-1954)
- Chomsky-1 Sprachen: Linear beschränkte Automaten (eine Einschränkung von Turingmaschinen)

Turingmaschinen

Schematische Darstellung einer Turingmaschine:



Turingmaschinen

Eigenschaften von Turingmaschinen:

- Wie endliche Automaten haben Turingmaschinen endlich viele Zustände und lesen eine Eingabe von einem Band, welches in Zellen (Felder) unterteilt ist.
- In jedem Feld des Bands steht ein Zeichen aus einem endlichen Bandalphabet. Ein Lesekopf fährt über das Band.
- Unterschied zu endlichen Automaten: der Lesekopf kann sich nach links und rechts bewegen und auch Zeichen überschreiben.
- Falls nur Zeichen des Eingabeworts überschrieben werden: Turingmaschine heißt linear beschränkt (Maschinenmodell für Chomsky-1-Sprachen).
- Falls der Lesekopf auch über den linken und rechten Rand des Eingabeworts hinauslaufen und dort schreiben kann: allgemeine Turingmaschine mit unbeschränktem Band (Maschinenmodell für Chomsky-0-Sprachen).

Turingmaschinen

Turingmaschinen und Computer:

- Das Konzept der Turingmaschine wurde von Alan Turing 1936 erfunden, noch bevor die ersten echten Computer gebaut wurden.
- Es ist nicht nur aus historischen Gründen interessant, sondern auch, weil es ein sehr einfaches Berechnungsmodell darstellt.

  Wenn man zeigen will, dass etwas *nicht* berechenbar ist, dann ist es viel besser, dies mit einem möglichst einfachen Berechnungsmodell zu tun. (Natürlich sollte man vorher sicherstellen, dass dieses Berechnungsmodell äquivalent zu komplexeren Modellen ist.)
- Analogie zu einem heutigen Computer:
  - Kontrolle mit endlich vielen Zuständen $\rightsquigarrow$ Programm
  - (Eingabe-)Band $\rightsquigarrow$ Speicher

Turingmaschinen

Beispiel 1: Turingmaschine, die eine Binärzahl auf dem Band um eins inkrementiert.

Idee:

- Kopf der Turingmaschine steht zunächst auf dem am weitesten links befindlichen (höchstwertigen) Bit der Binärzahl.
- Kopf nach rechts laufen lassen, bis ein Leerzeichen gefunden wird.
- Dann wieder nach links laufen und jede 1 durch 0 ersetzen, solange bis eine 0 oder ein Leerzeichen $\square$ (ein spezielles Bandsymbol) auftaucht.
- Dieses Zeichen dann durch 1 ersetzen, bis zum Zahlanfang laufen und in einen Endzustand übergehen.

Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)

□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)

□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)

□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)

□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)

□ = Leerzeichen

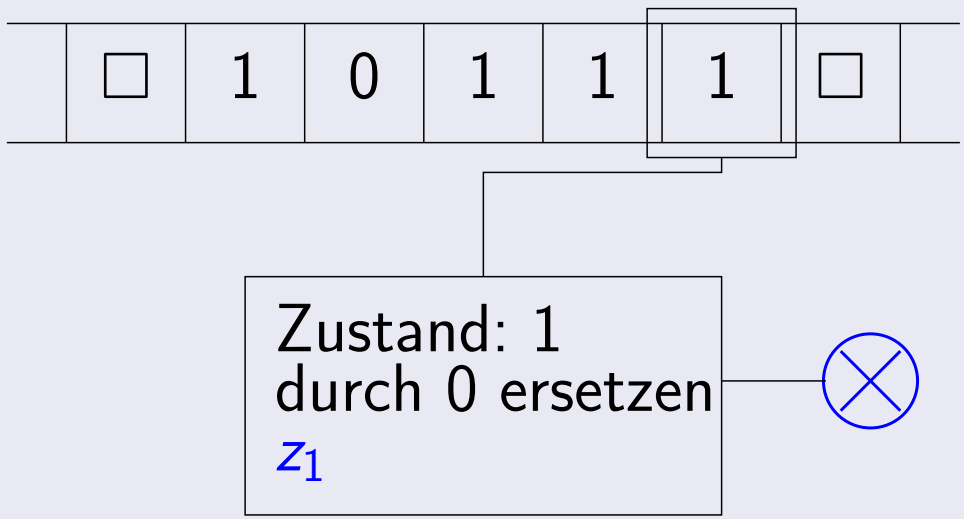
Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)

□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

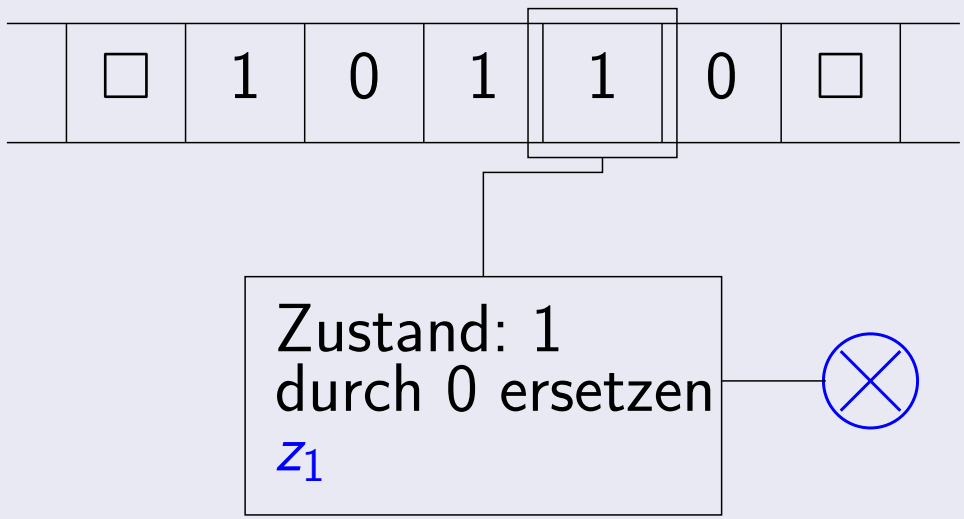
Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)



□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

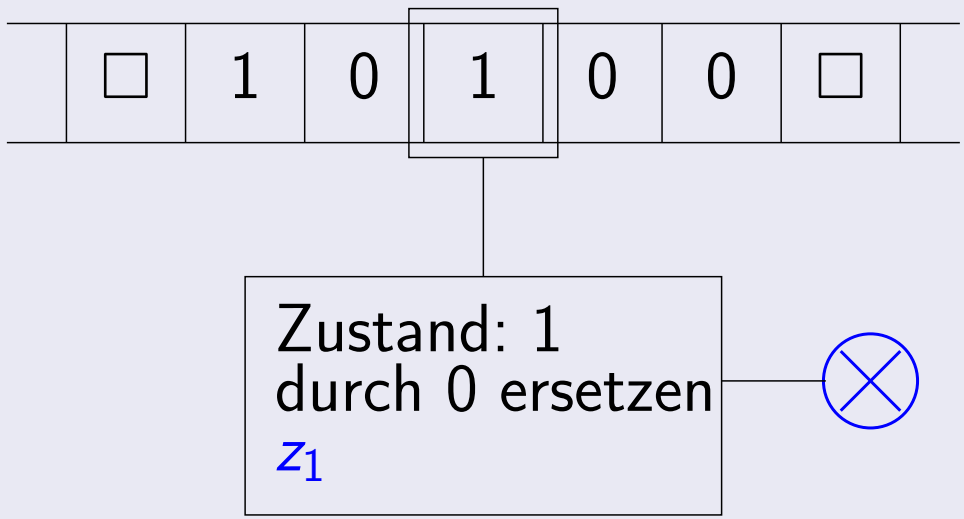
Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)



□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

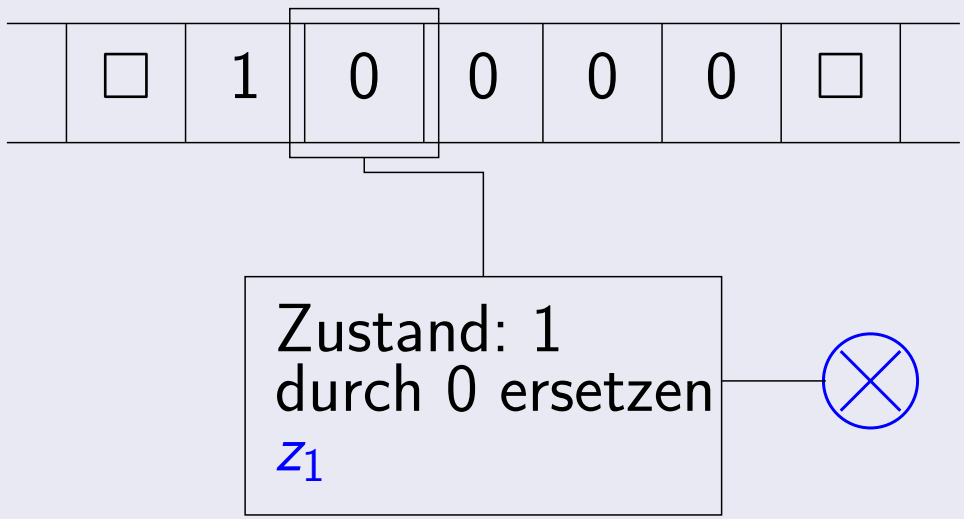
Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)



□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)



□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)

□ = Leerzeichen

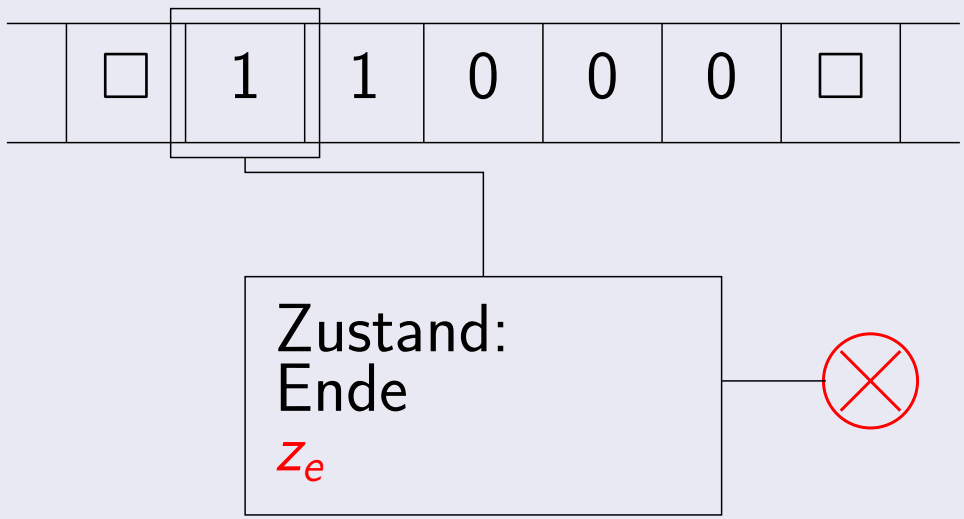
Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)

□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

Simulation (Inkrementiere Binärzahl 10111)



□ = Leerzeichen

Turingmaschinen

Turingmaschine (Definition)

Eine deterministische Turingmaschine M ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$, wobei

- Z die endliche Menge der Zustände,
- Σ das endliche Eingabealphabet,
- Γ mit $\Gamma \supseteq \Sigma$ das endliche Arbeitsalphabet oder Bandalphabet (es soll $\Gamma \cap Z = \emptyset$ gelten),
- $z_0 \in Z$ der Startzustand,
- $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände,
- $\delta\colon (Z \setminus E) \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ die Überführungsfunktion, und
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ das Leerzeichen oder Blank ist.

Abkürzung: TM

Turingmaschinen

Bedeutung der Überführungsfunktion:
sei $\delta(z, a) = (z', b, x)$ mit $z, z' \in Z$, $a, b \in \Gamma$, $x \in \{L, R, N\}$.

Falls die Turingmaschine sich im Zustand z befindet und in der Zelle, wo der (Schreib-Lese-)Kopf aktuell steht, das Bandsymbol a steht, so

- wechselt sie in den Zustand z',
- überschreibt das a in der aktuell gelesenen Zelle durch b und
- führt folgende Kopfbewegung aus.
  - Kopf ein Feld nach links, falls $x = L$.
  - Kopf bleibt stehen, falls $x = N$.
  - Kopf ein Feld nach rechts, falls $x = R$.

Beachte: da $\delta\colon (Z \setminus E) \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ (d.h. δ ist auf Paaren (z, a) mit $z \in E$ nicht definiert), terminiert die Turingmaschine genau dann, wenn der aktuelle Zustand ein Endzustand aus E ist.

Turingmaschinen

Neben deterministischen Turingmaschinen gibt es auch nichtdeterministische Turingmaschinen.

Überführungsfunktion für nichtdeterministische Turingmaschinen:

$$\delta\colon (Z \setminus E) \times \Gamma \to 2^{Z \times \Gamma \times \{L,R,N\}}.$$

Jedem Zustand und Bandsymbol wird eine (eventuell leere) Menge von möglichen Aktionen zugeordnet.

Zunächst wollen wir uns aber auf deterministische Turingmaschinen konzentrieren.

Turingmaschinen

Beispiel: Turingmaschine zur Inkrementierung einer Binärzahl

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_e\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\}) \qquad \text{mit}$$

Überführungsfunktion: rechtes Zahlende finden

$$\begin{aligned} \delta(z_0, 0) &= (z_0, 0, R) \\ \delta(z_0, 1) &= (z_0, 1, R) \\ \delta(z_0, \square) &= (z_1, \square, L) \end{aligned}$$

Überführungsfunktion: 1 durch 0 ersetzen

$$\begin{aligned} \delta(z_1, 0) &= (z_2, 1, L) \\ \delta(z_1, 1) &= (z_1, 0, L) \\ \delta(z_1, \square) &= (z_e, 1, N) \end{aligned}$$

Turingmaschinen

Überführungsfunktion: zurück zum linken Zahlanfang (ist nicht so wichtig)

$$\begin{aligned}\delta(z_2, 0) &= (z_2, 0, L)\\ \delta(z_2, 1) &= (z_2, 1, L)\\ \delta(z_2, \square) &= (z_e, \square, R)\end{aligned}$$

Turingmaschinen

Beispiel 2: Turingmaschinen zur Spracherkennung

Wir suchen eine Turingmaschine, die die Sprache $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ (nicht kontextfrei!) erkennt.

Idee:

- Kopf steht zunächst am linken Ende der Folge von a's.
- Links neben der Folge von a's die Binärzahl 0 aufs Band schreiben.
- a's nacheinander durch ein anderes Zeichen (#) ersetzen. Nach jeder Ersetzung nach links zum Zähler laufen und diesen um eins inkrementieren.
- Sobald alle a's verschwunden sind (nach dem letzten # kommt ein $\square$), überprüfen, ob der Zähler die Form $10 \cdots 0$ hat.

  Beachte: Eine Zahl n ist eine Zweierpotenz genau dann, wenn ihre Binärdarstellung die Form $10 \cdots 0$ hat.

Turingmaschinen

Wie bei anderen Maschinenmodellen (z.B. Kellerautomaten) gibt es auch bei Turingmaschinen den Begriff einer Konfiguration, d.h., einer Momentaufnahme einer Turingmaschinen-Berechnung.

Konfiguration (Definition)

Eine Konfiguration einer Turingmaschine ist ein Wort

$$k \in \Gamma^* Z \Gamma^+.$$

Bedeutung: $k = \alpha z \beta$ mit $z \in Z$, $\alpha \in \Gamma^*$, $\beta \in \Gamma^+$
(β ist also ein nicht-leeres Wort)

- links vom Kopf steht auf dem Band das Wort $\cdots \Box \alpha$
- ab der Zelle, wo der Kopf gerade steht, und rechts davon steht auf dem Band das Wort $\beta \Box \cdots$ Der Kopf steht auf dem ersten Zeichen von β (hier ist $\beta \neq \varepsilon$ wichtig).
- $z \in Z$ ist der aktuelle Zustand.

Turingmaschinen

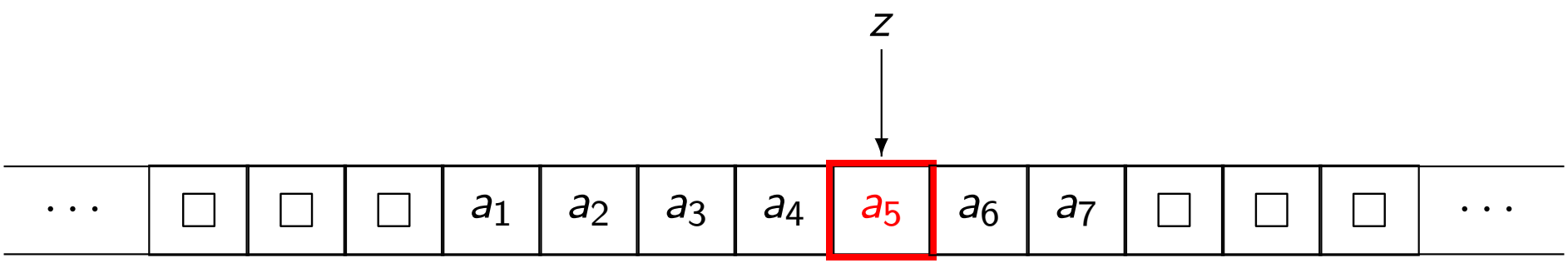
$\cdots\square$ steht hier für eine unendliche nach links laufende Folge von $\square$'en.

$\square\cdots$ steht für eine unendliche nach rechts laufende Folge von $\square$'en.

Das Band ist also nach links und rechts unbeschränkt, aber nur ein endlicher Abschnitt des Band enthält Bandsymbole aus $\Gamma \setminus \{\square\}$.

Beachte: die Wörter $\alpha z \beta$ und $\square\alpha z\beta\square$ beschreiben die gleiche Konfiguration (die Blanks am Anfang und Ende von $\square\alpha z\beta\square$ sind sozusagen überflüssig).

Beispiel: Grafische Darstellung der Konfiguration $a_1 a_2 a_3 a_4\, z\, a_5 a_6 a_7$



Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Keine Bewegung

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z\, b_1\, b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_m \mathbf{z'}\, c\, b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z'}, c, N) \quad (m \geq 0,\ n \geq 1)$.

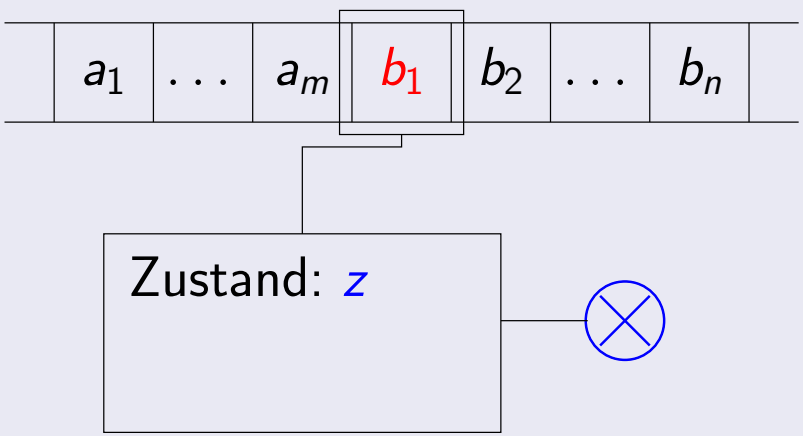
Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Keine Bewegung

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z\, b_1\, b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_m \mathbf{z'}\, c\, b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z'}, c, N) \quad (m \geq 0,\ n \geq 1)$.



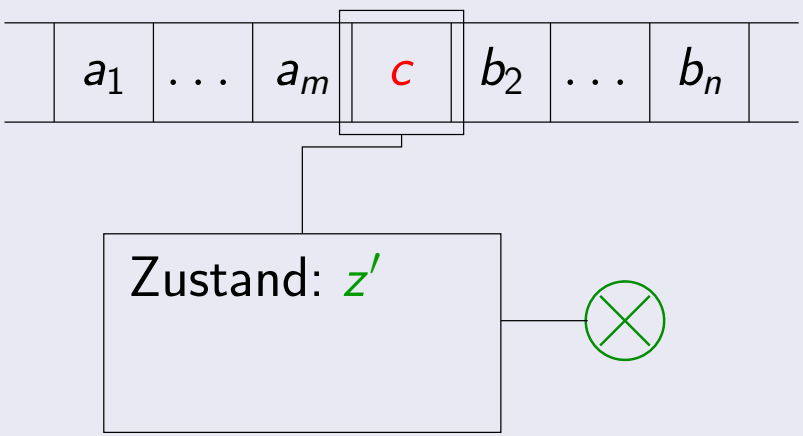
Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Keine Bewegung

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z\, b_1\, b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_m z'\, c\, b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (z', c, N) \quad (m \geq 0,\ n \geq 1)$.



Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Schritt nach links

Es gilt: $a_1 \cdots a_{m-1} a_m z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_{m-1} \mathbf{z'} a_m c b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z'}, c, L) \quad (m \geq 1,\ n \geq 1)$.

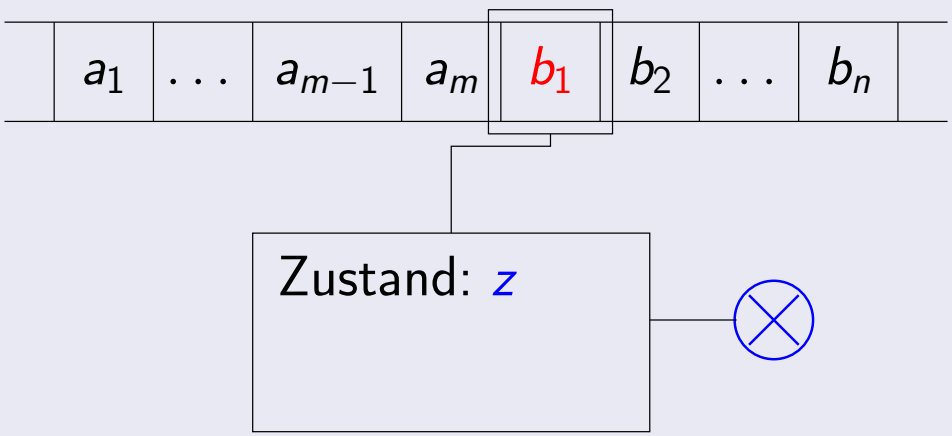
Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Schritt nach links

Es gilt: $a_1 \cdots a_{m-1} a_m z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_{m-1} z' a_m c b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (z', c, L) \quad (m \geq 1,\ n \geq 1)$.



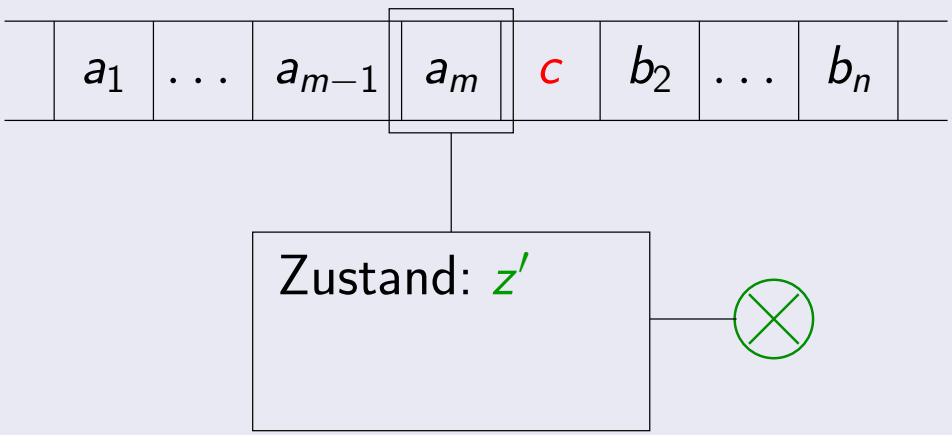
Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Schritt nach links

Es gilt: $a_1 \cdots a_{m-1} a_m z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_{m-1} z' a_m c b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (z', c, L) \quad (m \geq 1,\ n \geq 1)$.



Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Schritt nach rechts

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_m c \mathbf{z}' b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z}', c, R) \quad (m \geq 0,\ n \geq 2)$.

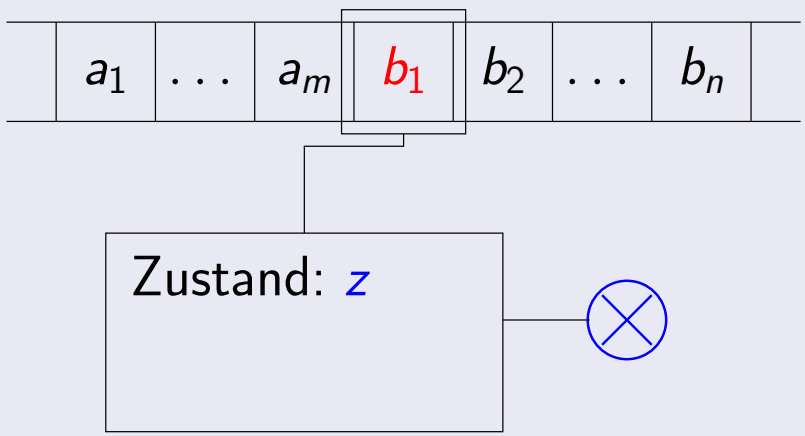
Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Schritt nach rechts

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_m c \mathbf{z}' b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z}', c, R) \quad (m \geq 0,\ n \geq 2)$.



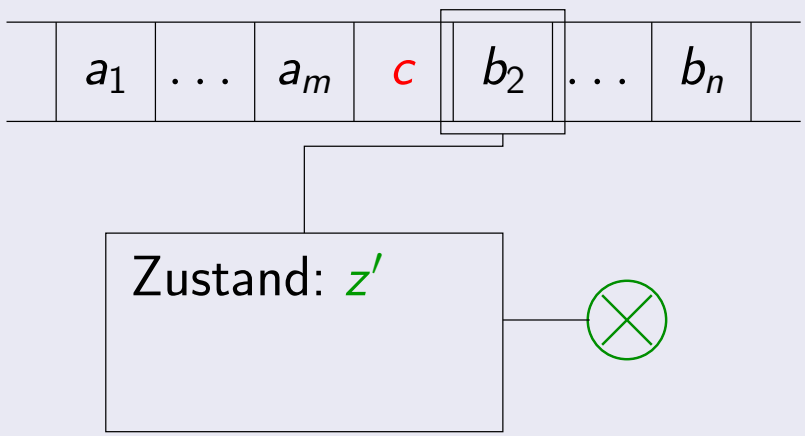
Turingmaschinen

Definition einer Übergangsrelation $\vdash_M$, die beschreibt, welche Konfigurationsübergänge möglich sind.

Schritt nach rechts

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M a_1 \cdots a_m c \mathbf{z'} b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z'}, c, R) \quad (m \geq 0,\ n \geq 2)$.



Turingmaschinen

Sonderfälle: Bandende erreicht $\rightsquigarrow$ zusätzliches Leerzeichen muss hinzugefügt werden

Linkes Bandende

Es gilt: $z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M \mathbf{z}' \square c b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z}', c, L)$.

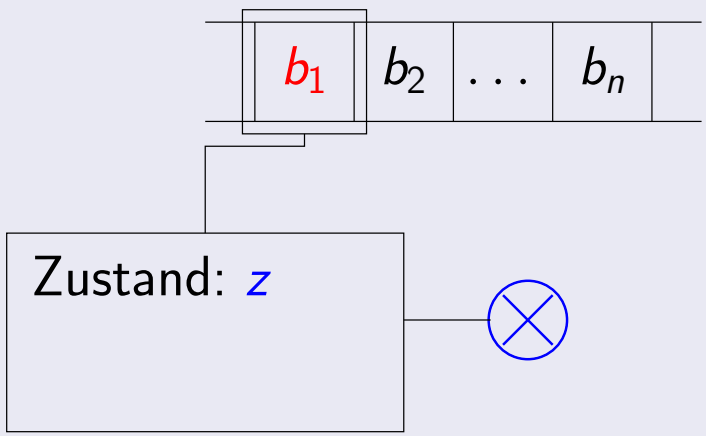
Turingmaschinen

Sonderfälle: Bandende erreicht $\rightsquigarrow$ zusätzliches Leerzeichen muss hinzugefügt werden

Linkes Bandende

Es gilt: $z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M \mathbf{z}' \square c b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z}', c, L)$.



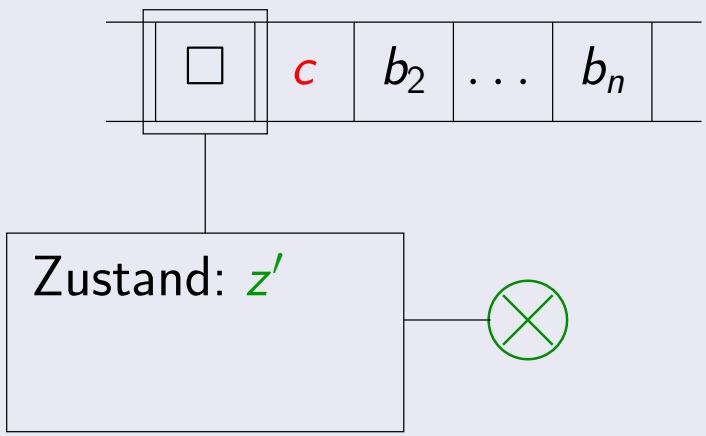
Turingmaschinen

Sonderfälle: Bandende erreicht $\rightsquigarrow$ zusätzliches Leerzeichen muss hinzugefügt werden

Linkes Bandende

Es gilt: $z b_1 b_2 \cdots b_n \vdash_M \mathbf{z}' \square c b_2 \cdots b_n$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z}', c, L)$.



Turingmaschinen

Sonderfälle: Bandende erreicht $\rightsquigarrow$ zusätzliches Leerzeichen muss hinzugefügt werden

Rechtes Bandende

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z b_1 \vdash_M a_1 \cdots a_m c \mathbf{z}' \square$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z}', c, R)$.

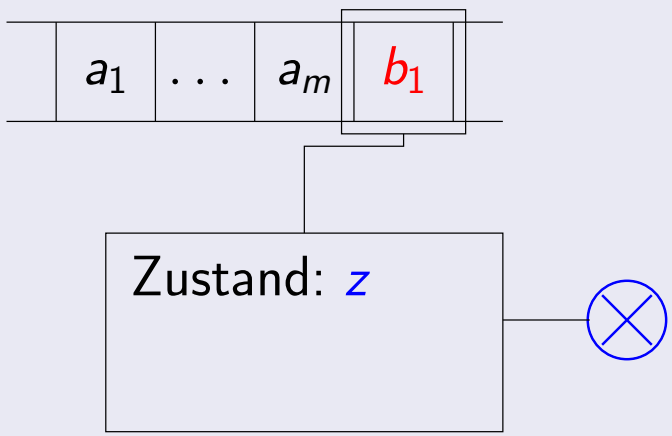
Turingmaschinen

Sonderfälle: Bandende erreicht $\rightsquigarrow$ zusätzliches Leerzeichen muss hinzugefügt werden

Rechtes Bandende

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z b_1 \vdash_M a_1 \cdots a_m c \mathbf{z}' \square$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z}', c, R)$.



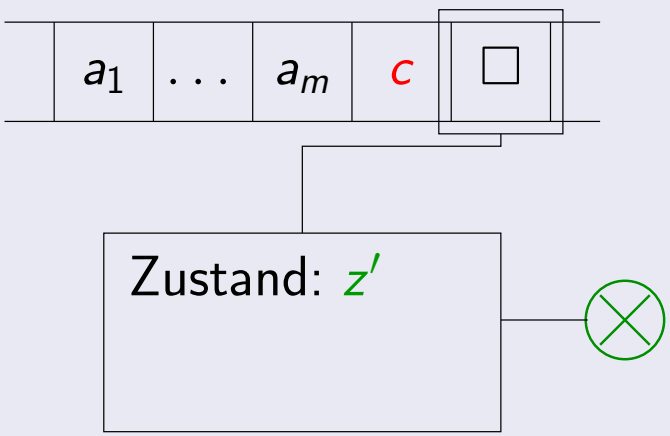
Turingmaschinen

Sonderfälle: Bandende erreicht $\rightsquigarrow$ zusätzliches Leerzeichen muss hinzugefügt werden

Rechtes Bandende

Es gilt: $a_1 \cdots a_m z b_1 \vdash_M a_1 \cdots a_m c \mathbf{z}' \square$,

falls $\delta(z, b_1) = (\mathbf{z}', c, R)$.



Turingmaschinen

Akzeptierte Sprache (Definition)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine. Dann ist die von M akzeptierte Sprache:

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists k \in \Gamma^* E \Gamma^+ : z_0 x \square \vdash_M^* k\}.$$

Akzeptierte Sprache: Alle Eingabe-Wörter, mit denen die Turingmaschine in einen Endzustand gelangen kann. Dabei startet die Turingmaschine im Anfangszustand z_0, der Kopf befindet sich auf dem ersten Zeichen des Eingabe-Wortes. Falls dieses nicht existiert (Eingabe x ist das leere Wort) liest der Kopf ein Blank $\square$.

Beispiel: Die Berechnung auf der nächsten Folie entspricht der Simulation auf Folie 320 für die Turingmaschine von Folie 324–325.

Turingmaschinen

$$
\begin{aligned}
z_0 10111 &\vdash_M 1 z_0 0111 && \text{wegen } \delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R) \\
&\vdash_M 10 z_0 111 && \text{wegen } \delta(z_0, 0) = (z_0, 0, R) \\
&\vdash_M 101 z_0 11 && \text{wegen } \delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R) \\
&\vdash_M 1011 z_0 1 && \text{wegen } \delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R) \\
&\vdash_M 10111 z_0 \Box && \text{wegen } \delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R) \\
&\vdash_M 1011 z_1 1 \Box && \text{wegen } \delta(z_0, \Box) = (z_1, \Box, L) \\
&\vdash_M 101 z_1 10 \Box && \text{wegen } \delta(z_1, 1) = (z_1, 0, L) \\
&\vdash_M 10 z_1 100 \Box && \text{wegen } \delta(z_1, 1) = (z_1, 0, L) \\
&\vdash_M 1 z_1 0000 \Box && \text{wegen } \delta(z_1, 1) = (z_1, 0, L) \\
&\vdash_M z_2 11000 \Box && \text{wegen } \delta(z_1, 0) = (z_2, 1, L) \\
&\vdash_M z_2 \Box 11000 \Box && \text{wegen } \delta(z_2, 1) = (z_2, 1, L) \\
&\vdash_M \Box z_e 11000 \Box && \text{wegen } \delta(z_2, \Box) = (z_e, \Box, R)
\end{aligned}
$$

Turingmaschinen

Für **nicht-deterministische Turingmaschinen** müssen die Definitionen folgendermaßen angepaßt werden:

- Falls sich die Turingmaschine im Zustand z befindet und das Zeichen b auf dem Band steht, sind alle Konfigurationsübergänge möglich, die durch die Menge $\delta(z, b)$ beschrieben werden.
- Ein Wort ist akzeptiert, wenn es eine mögliche Folge von Konfigurationen gibt, die zu einem Endzustand führt, auch wenn andere Folgen in Sackgassen geraten oder unendlich lang sind, ohne dabei je einen Endzustand zu erreichen.

Linear beschränkte Automaten

Wir definieren nun ein Maschinenmodell für Chomsky-1-Sprachen (erzeugt durch monotone Grammatiken): linear beschränkte Automaten, die niemals außerhalb der Eingabe arbeiten dürfen.

Linear beschränkte Automaten

Ein (nicht)deterministischer linear beschränkter Automat (LBA) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$, welches den gleichen Eigenschaften wie eine (nicht)deterministische Turingmaschine genügt, nur dass (i) A nicht das Blanksymbol $\square$ durch ein Nicht-Blanksymbol überschreiben darf und (ii) A nicht ein Nicht-Blanksymbol durch $\square$ überschreiben darf.

Die Relation $\vdash_A$ ist wie für eine TM definiert, nur dass wir die Sonderfälle für das linke und rechte Bandende (Folie 332 und 333) weglassen.

Die von dem LBA A akzeptierte Sprache ist

$$T(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists k \in \Gamma^* E \Gamma^+ : z_0 w \square \vdash_A^* k\}$$

Chomsky-1-Sprachen

Bemerkung: Das abschließende Blanksymbol $\square$ erlaubt A, das rechte Bandende zu erkennen. Es dient sozusagen als rechtes Begrenzungssymbol.

Satz 3 (Kuroda)

Eine Sprache L wird von einem nichtdeterministischen LBA erkannt, genau dann, wenn es eine Typ-1-Grammatik G mit $L = L(G)$ gibt.

Beweis:

Sei zunächst $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ-1-Grammatik, d.h. es gilt $|\ell| \leq |r|$ für alle $(\ell, r) \in P$ (einzige Ausnahme: $S \to \varepsilon$, siehe ε-Sonderregelung, Folie 35).

Sei $w \in \Sigma^*$ eine Eingabe.

Wir simulieren nun eine Ableitung $S \Rightarrow_G^* w$ rückwärts mittels eines nichtdeterministischen LBA A.

Chomsky-1-Sprachen

$B[i]$ ist im folgenden das i-te Zeichen auf dem Band des LBA A.

$\tilde{\square}$ ist ein neues Bandsymbol, welches als Kopie des Blank-Symbols $\square$ fungiert.

Der LBA A arbeitet wie folgt:

1. A bewegt den Kopf zum linkesten Symbol auf dem Band, "rät" nichtdeterministisch eine Regel $(\ell, r) \in P$ und merkt sich diese im Zustand.
2. Nun läuft der Kopf von A nach rechts zu einer nichtdeterministisch geratenen Position i.
3. Falls $B[i] \cdots B[i + |r| - 1] = r$ gilt, schreibt A auf den Bandabschnitt $B[i] \cdots B[i + |\ell| - 1]$ das Wort ℓ. Ansonsten gehe wieder zu (1).

Chomsky-1-Sprachen

4. Falls $|\ell| < |r|$ gilt, muss M nun jedes Zeichen auf dem Band ab Position $i + |r|$ um genau $|r| - |\ell|$ viele Positionen nach links verschieben.

   Falls dabei auf dem Band eine Satzform der Länge $< |w|$ entsteht, füllt der LBA am rechten Ende die Satzform mit Symbolen $\tilde{\square}$ auf (beachte: A darf nicht Nicht-Blanks mit dem eigentlichen Blank-Symbol $\square$ überschreiben).

5. A akzeptiert, falls das aktuelle Band mit $S\square$ oder $S\tilde{\square}$ beginnt, ansonsten gehe wieder zu (1).

Falls $S \to \varepsilon$ eine Produktion in P ist (d.h. $\varepsilon \in L(G)$), kann A bei Lesen von $\square$ direkt aus dem Anfangszustand in einen Endzustand übergehen.

Chomsky-1-Sprachen

Für diesen LBA A gilt $L(G) = T(A)$.

Wir zeigen nun die andere Richtung.

Das folgende Lemma wird hilfreich sein.

Lemma 4

Sei $G = (V, \Sigma \cup \{r\}, P, S)$ eine Typ-1-Grammatik mit $r \notin \Sigma$ und $L(G) \subseteq \Sigma^* r$. Dann existiert eine Typ-1-Grammatik G' mit

$$L(G') = \{w \in \Sigma^* \mid wr \in L(G)\}.$$

Beweis:

O.B.d.A. können wir annehmen, dass gilt:

- Für jede Produktion $(u, v) \in P$ gilt $0 \leq |v| - |u| \leq 1$
- S kommt nicht in einer rechten Seite vor.

Chomsky-1-Sprachen

Wir definieren eine neue Variablenmenge V' durch

$$V' = V \cup \{r\} \cup \{A_{ab} \mid a, b \in V \cup \Sigma \cup \{r\}\}.$$

Intuition: A_{ab} ist ein Nichtterminal, welches die letzten beiden Symbole ab in einer Satzform zu einem Symbol zusammenfasst.

Die neue Produktionsmenge P' der Grammatik G' besteht aus den Produktionen auf der nächsten Folie.

In allen Fällen ist dabei $a, b, c, d \in V \cup \Sigma \cup \{r\}$ und $x, y \in (V \cup \Sigma \cup \{r\})^*$.

Chomsky-1-Sprachen

- $S \to \varepsilon$ falls $r \in L(G)$,
- $S \to A_{ab}$ falls $S \Rightarrow_G^* ab$
- $xA_{ab} \to yA_{cd}$ falls $(xab \to ycd) \in P$
- $xA_{ab} \to yA_{cb}$ falls $(xa \to yc) \in P$
- $A_{ab} \to A_{ac}$ falls $(b \to c) \in P$
- $A_{ab} \to aA_{cd}$ falls $(b \to cd) \in P$
- alle Produktionen aus P
- $A_{ar} \to a$ falls $a \in \Sigma$

Dann ist $G' = (V', \Sigma, P', S)$ die gesuchte Grammatik. □

Chomsky-1-Sprachen

Völlig analog zeigt man:

Lemma 5

Sei $G = (V, \Sigma \cup \{\ell\}, P, S)$ eine Typ-1-Grammatik mit $\ell \notin \Sigma$ und $L(G) \subseteq \ell\,\Sigma^*$. Dann existiert eine Typ-1-Grammatik G' mit

$$L(G') = \{w \in \Sigma^* \mid \ell w \in L(G)\}.$$

und durch Anwendung beider Lemmata:

Lemma 6

Sei $G = (V, \Sigma \cup \{\ell, r\}, P, S)$ eine Typ-1-Grammatik mit $\ell, r \notin \Sigma$ und $L(G) \subseteq \ell\,\Sigma^*\,r$. Dann existiert eine Typ-1-Grammatik G' mit

$$L(G') = \{w \in \Sigma^* \mid \ell w r \in L(G)\}.$$

Chomsky-1-Sprachen

Nun zurück zum Beweis von Satz 3. Sei $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ ein LBA.

Aufgrund von Lemma 6 genügt es, eine Typ-1-Grammatik für die Sprache $\{\$w\square \mid w \in T(A)\}$ anzugeben ($\$ ist ein neues Terminalsymbol).

Hierzu simulieren wir A rückwärts mittels der Typ-1-Grammatik $G = (V, \Sigma \cup \{\$, \square\}, P, S)$ mit der Variablenmenge

$$V = \{S, B, C\} \cup (\Gamma \setminus (\Sigma \cup \{\square\})) \cup (Z \times \Gamma)$$

und der folgenden Produktionsmenge P (Folie 345–347):

$$\begin{array}{lcll} S & \to & \$B & \\ B & \to & aB \mid (z,a)C \mid (z,\square) & \text{für alle } a \in \Gamma \setminus \{\square\}, z \in E \\ C & \to & aC \mid \square & \text{für alle } a \in \Gamma \setminus \{\square\} \end{array}$$

Chomsky-1-Sprachen

Mit den Regeln für S, B und C kann man beliebige Wörter der Form

$$\$a_1 a_2 \cdots a_n (z, a) b_1 b_2 \cdots b_m \square \quad \text{oder} \quad \$a_1 a_2 \cdots a_n (z, \square)$$

mit $a_1, \ldots, a_n, a, b_1, \ldots, b_m \in \Gamma \setminus \{\square\}$ und $z \in E$ erzeugen.

Dies sind genau die Konfigurationen, in denen A akzeptiert, bis auf das Detail, dass wir den Zustand z und das aktuell gelesene Bandsymbol a zu einem Nichtterminal $(z, a) \in Z \times \Gamma$ zusammenfassen (macht den Rest der Grammatik etwas einfacher).

Mit den folgenden Produktionen wird der LBA A rückwärts simuliert:

$$\begin{array}{rcll} (z', a') & \to & (z, a) & \text{für alle } (z', a', N) \in \delta(z, a) \\ a'(z', b) & \to & (z, a)b & \text{für alle } (z', a', R) \in \delta(z, a), b \in \Gamma \\ (z', b)a' & \to & b(z, a) & \text{für alle } (z', a', L) \in \delta(z, a), b \in \Gamma \end{array}$$

Chomsky-1-Sprachen

Wird mittels der Produktionen auf der vorherigen Folie aus der zu Beginn erzeugten akzeptierenden Konfiguration schließlich eine initiale Konfiguration der Form

$$\$(z_0, c_1)c_2 \cdots c_n\square \quad \text{oder} \quad \$(z_0, \square)$$

abgeleitet (beachte: z_0 ist der Anfangszustand des LBA A), so wird mittels der folgenden Produktionen das Wort $\$c_1 c_2 \cdots c_n\square$ beziehungsweise $\$\square$ abgeleitet:

$$\begin{array}{rcll} \$(z_0, a) & \to & \$a & \text{für alle } a \in \Sigma \\ \$(z_0, \square) & \to & \$\square & \end{array}$$

Dann gilt $L(G) = \{\$w\square \mid w \in T(A)\}$. □

Chomsky-0-Sprachen

Satz 7 (Turingmaschinen und Chomsky-0-Sprachen)

Eine Sprache L wird von einer nichtdeterministischen Turingmaschine erkannt, genau dann, wenn es eine Typ-0-Grammatik G mit $L = L(G)$ gibt.

Beweisidee: durch Modifikation des Beweises von Satz 3:

Grammatiken $\rightarrow$ Turingmaschinen: hier muss bei der Simulation der Grammatik auf dem Turingmaschinen-Band bei verkürzenden Regeln (linke Seite ist länger als rechte Seite) der Bandinhalt auseinandergeschoben werden.

Turingmaschinen $\rightarrow$ Grammatiken: hier muss dafür gesorgt werden, dass die Grammatik bei Simulation der Turingmaschine links und rechts Leerzeichen erzeugen kann und diese nach erfolgreicher Berechnung auch wieder löscht.

Chomsky-0-Sprachen

Formal: Wir simulieren eine TM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mittels der Typ-0 Grammatik $G = (\{S, B, C, \$_1, \$_2\} \cup (\Gamma \setminus \Sigma) \cup (Z \times \Gamma),\ \Sigma, P, S)$ mit der folgenden Produktionsmenge P:

$$
\begin{array}{rcll}
S & \to & \$_1 B & \\
B & \to & aB \mid (z,a)C & \text{für alle } a \in \Gamma, z \in E \\
C & \to & aC \mid \$_2 & \text{für alle } a \in \Gamma \\
(z',a') & \to & (z,a) & \text{für alle } (z',a',N) \in \delta(z,a) \\
a'(z',b) & \to & (z,a)b & \text{für alle } (z',a',R) \in \delta(z,a), b \in \Gamma \\
(z',b)a' & \to & b(z,a) & \text{für alle } (z',a',L) \in \delta(z,a), b \in \Gamma \\
\$_1\square & \to & \$_1 & \\
\$_1(z_0,a) & \to & a & \text{für alle } a \in \Sigma \\
\square\$_2 & \to & \$_2 & \\
a\$_2 & \to & a & \text{für alle } a \in \Sigma \\
\$_1(z_0,\square)\$_2 & \to & \varepsilon &
\end{array}
$$

Chomsky-0-Sprachen

Wieder wird die Turingmaschine M rückwärts simuliert.

Die verkürzenden Regeln $\$_1\square \to \$_1$ und $\square\$_2 \to \$_2$ erlauben es Blanksymbole am Anfang und Ende der Konfiguration zu löschen.

Das ist wichtig um am Ende aus einer durch Rückwärtssimulation der TM abgeleiteten initialen Konfiguration

$$\$_1\square\cdots\square(z_0, c_1)c_2\cdots c_n\square\cdots\square\$_2 \quad \text{bzw.} \quad \$_1\square\cdots\square(z_0, \square)\square\cdots\square\$_2$$

zunächst

$$\$_1(z_0, c_1)c_2\cdots c_n\$_2 \quad \text{bzw.} \quad \$_1(z_0, \square)\$_2$$

abzuleiten.

Hieraus wird dann mittels der Produktionen $\$_1(z_0, c_1) \to c_1$ und $c_n\$_2 \to c_n$ bzw. $\$_1(z_0, \square)\$_2 \to \varepsilon$ das Eingabewort $c_1c_2\cdots c_n$ bzw. ε abgeleitet.

Es gilt dann $L(G) = T(M)$. □

Ergebnisse für Chomsky-1- und Chomsky-0-Sprachen

Satz 8 (Abschluss unter Komplement von Typ-1-Sprachen, Immerman, Szelepcsényi)

Wenn L eine Typ-1-Sprache ist, dann ist auch $\overline{L} = \Sigma^* \backslash L$ eine Typ-1-Sprache.

Ein Beweis wird in der Vorlesung **Strukturelle Komplexitätstheorie** vorgestellt.

Satz 9 (Nicht-Abschluss unter Komplement von Typ-0-Sprachen)

Es gibt eine Typ-0-Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass $\overline{L} = \Sigma^* \backslash L$ keine Typ-0-Sprache ist.

Begründung und Beispiele in der Vorlesung **Berechenbarkeit und Logik**.

Ergebnisse für Chomsky-1- und Chomsky-0-Sprachen

Satz 10 (Determinismus und Nichtdeterminismus bei Turingmaschinen)

Zu jeder nichtdeterministischen Turingmaschine gibt es eine deterministische Turingmaschine, die dieselbe Sprache akzeptiert.

Beweis:

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine nichtdeterministische TM, d. h.

$$\delta \colon (Z \setminus E) \times \Gamma \to 2^{Z \times \Gamma \times \{L,R,N\}}.$$

Idee: Wir konstruieren eine deterministische Turingmaschine, die bei Eingabe $x \in \Sigma^*$ systematisch nach einer erfolgreichen Berechnung von M sucht.

Sei $\# \notin Z \cup \Gamma$ ein neues Symbol.

Ergebnisse für Chomsky-1- und Chomsky-0-Sprachen

Eine erfolgreiche Berechnung von M auf Eingabe x ist ein Wort der Form

$$k_0 \# k_1 \# \cdots k_{m-1} \# k_m$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) $k_0, k_1, \ldots, k_m \in \Gamma^* Z \Gamma^+$

(2) $k_0 = z_0 x \square$.

(3) $\forall i \in \{0, 1, \ldots m-1\} : k_i \vdash_M k_{i+1}$

(4) $k_m \in \Gamma^* E \Gamma^+$

Offensichtlich gilt $x \in T(M)$ genau dann, wenn eine erfolgreiche Berechnung von M auf Eingabe x existiert.

Eine deterministische Turingmaschine M' kann bei Eingabe von x und $w \in (Z \cup \Gamma \cup \{\#\})^*$ feststellen, ob w eine erfolgreiche Berechnung von M auf Eingabe x ist (geht sogar mit einem deterministischen LBA).

Hierzu muss M' lediglich die vier Eigenschaften (1)–(4) überprüfen.

Ergebnisse für Chomsky-1- und Chomsky-0-Sprachen

Nun muss man nur noch eine deterministische Turingmaschine M'' konstruieren, die systematisch der Reihe nach alle Wörter $w \in (Z \cup \Gamma \cup \{\#\})^*$ durchgeht, und jedesmal (mittels M') überprüft, ob w eine erfolgreiche Berechnung von M auf Eingabe x ist.

"Systematisch der Reihe nach" kann hier z. B. mittels einer längenlexikographischen Ordnung formalisiert werden.

Sei zunächst $\sqsubset$ eine beliebige lineare Ordnung auf dem Alphabet $\Omega = Z \cup \Gamma \cup \{\#\}$.

Die zu $\sqsubset$ gehörende längenlexikographische Ordnung $\sqsubset_{\text{lex}}$ auf Ω^* ist wie folgt definiert:

Für $u, v \in \Omega^*$ gilt $u \sqsubset_{\text{lex}} v$ genau dann, wenn

- $|u| < |v|$ (u ist kürzer als v) oder
- $|u| = |v|$ und es gibt $x, y, z \in \Omega^*, a, b \in \Omega$ mit $u = xay$, $v = xbz$, und $a \sqsubset b$ (an der ersten Position, wo sich u und v unterscheiden, steht in u das kleinere Symbol).

Ergebnisse für Chomsky-1- und Chomsky-0-Sprachen

Grobstruktur der deterministischen Turingmaschine M'':

1. Initialisiere hinter der Eingabe x auf dem Band ein Wort $w \in (Z \cup \Gamma \cup \{\#\})^*$ mit ε
2. Überprüfe mittels M' ob w eine erfolgreiche Berechnung von M auf Eingabe x ist.
   Falls ja, gehe in einen Endzustand über, sonst gehe zu (3)
3. Inkrementiere w, d. h. überschreibe w mit dem längenlexikographisch nächsten Wort w' (formal: w' ist das bezüglich $\sqsubset_{\text{lex}}$ kleinste Wort mit $w \sqsubset_{\text{lex}} w'$).
4. Gehe zu (2). □

Determinismus und Nichtdeterminismus bei LBAs (erstes LBA-Problem)

Es ist nicht bekannt, ob für jeden LBA A ein deterministischer LBA A' mit $T(A) = T(A')$ existiert.