Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Zu jedem DFA M_1 mit n Zuständen existiert ein NFA M_2 mit höchstens n Zuständen so, dass $T(M_1) = T(M_2)$.

(b) Zu jedem NFA M_1 mit n Zuständen existiert ein DFA M_2 mit maximal 2^n Zuständen so, dass $T(M_1) = T(M_2)$.

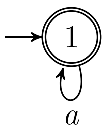
(c) Für einen endlichen Automaten M_1 ist $T(M_1)$ stets endlich.

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) Wahr, denn jeder DFA ist auch ein NFA. Wir können also $M_2 = M_1$ als NFA wählen.

(b) Wahr: Durch Potenzmengenkonstruktion erhalten wir aus einem NFA mit n Zuständen einen DFA mit 2^n Zuständen (die nicht alle vom Startzustand erreichbar sein müssen).

(c) Falsch, zum Beispiel wird die unendliche Sprache $L(a^*) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von dem folgenden endlichen Automaten erzeugt:

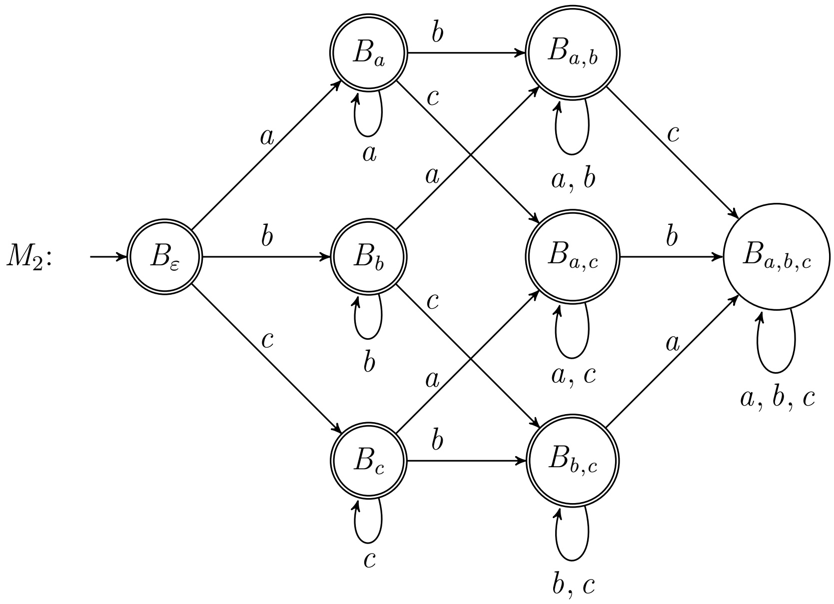


Aufgabe 2. Geben Sie zu der folgenden Sprache einen deterministischen, endlichen Automaten an:

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ enthält höchstens zwei verschiedene Buchstaben.}\}$$

Finden Sie einen nichtdeterministischen, endlichen Automaten, der weniger Zustände benötigt?

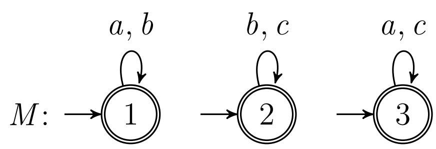
Lösung zu Aufgabe 2.



Erklärung

Wir verwenden die Zustände des Automaten um zu „speichern", welche der Symbole a, b, c bereits im Wort enthalten sind. Zum Beispiel enthalten alle Wörter, die in den Zustand $B_{a,c}$ führen, beliebig oft die Buchstaben a und c aber nicht den Buchstaben b.

Ein deutlich kleinerer NFA M mit nur 3 Zuständen (alle sind Start- und Endzustände) sieht wie folgt aus:



Aufgabe 3. Gegeben seien folgende NFAs:

1. $M_1 = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_1, \{1\}, \{3\})$, wobei δ_1 gegeben ist durch:

δ_1	a	b
1	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{2, 3\}$
3	$\varnothing$	$\{3\}$

2. $M_2 = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta_2, \{1,2\}, \{2,3\})$, wobei δ_2 gegeben ist durch:

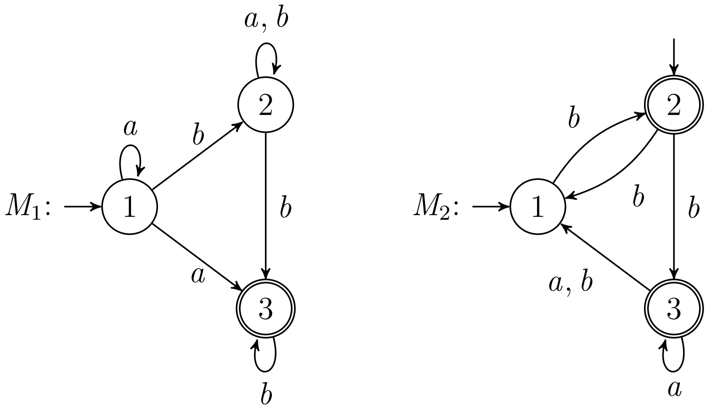
δ_2	a	b
1	$\varnothing$	$\{2\}$
2	$\varnothing$	$\{1,3\}$
3	$\{1,3\}$	$\{1\}$

(a) Zeichnen Sie das zu M_1 bzw. M_2 gehörige Automatendiagramm.

(b) Geben Sie mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion einen zu M_1 bzw. M_2 äquivalenten DFA an. Es genügt jeweils, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

Lösung zu Aufgabe 3.

(a)



(b) **DFA zu M_1**

Wir konstruieren den DFA mittels Potenzmengenkonstruktion. Vom Startzustand nicht erreichbare Zustände werden weggelassen.

Sei $Z = \{1,2,3\}$ die Menge der Zustände von M_1 und $S = \{1\}$ die Menge der Startzustände von M_1.

Sei $M_1' = (2^Z, \{a,b\}, \delta_1', S, F)$ der DFA zu M_1.

Beachte: Die Bezeichnungen der Zustände aus M_1' sind die Teilmengen der Zustandsmenge Z von M_1. Somit ist zum Beispiel $S = \{1\}$ keine Menge von Startzuständen von M_1', sondern ein einzelner Zustand aus 2^Z.

$$\delta_1'(\{1\}, a) = \delta_1(1, a) = \{1, 3\}$$
$$\delta_1'(\{1\}, b) = \delta_1(1, b) = \{2\}$$

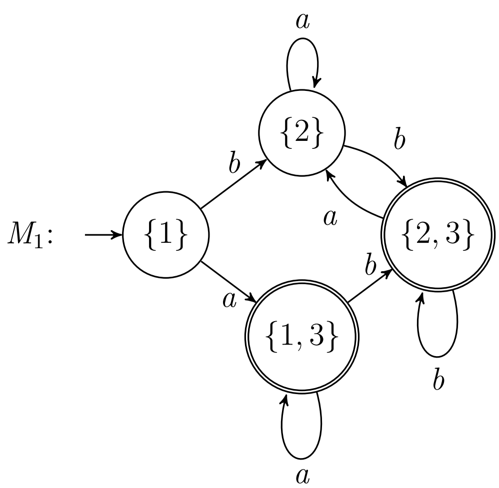
$$\delta_1'(\{1,3\}, a) = \delta_1(1, a) \cup \delta_1(3, a) = \{1, 3\} \cup \varnothing = \{1, 3\}$$
$$\delta_1'(\{1,3\}, b) = \delta_1(1, b) \cup \delta_1(3, b) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$$

$$\delta_1'(\{2,3\}, a) = \delta_1(2, a) \cup \delta_1(3, a) = \{2\} \cup \varnothing = \{2\}$$
$$\delta_1'(\{2,3\}, b) = \delta_1(2, b) \cup \delta_1(3, b) = \{2, 3\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$$

$$\delta_1'(\{2\}, a) = \delta_1(2, a) = \{2\}$$
$$\delta_1'(\{2\}, b) = \delta_1(2, b) = \{2, 3\}$$

Nun bestimmen wir noch F, die Menge der Endzustände des DFA. Allgemein gilt $F = \{\, Y \subseteq Z \mid Y \cap E \neq \varnothing \}$. Dabei ist Z ist die Zustandsmenge des NFA, E die Menge seiner Endzustände.

Für M_1 ergibt sich $F = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ (alle Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$, die das Element 3 enthalten). Vom Startzustand aus erreichbar sind davon die Zustände $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$.



DFA zu M_2

Sei $Z = \{1,2,3\}$ die Menge der Zustände von M_2 und $S = \{1,2\}$ die Menge der Startzustände von M_2.

Sei $M_2' = (2^Z, \{a,b\}, \delta_2', S, F)$ der DFA zu M_2.

$\delta_2'(\{1,2\}, a) = \delta_2(1,a) \cup \delta_2(2,a) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$
$\delta_2'(\{1,2\}, b) = \delta_2(1,b) \cup \delta_2(2,b) = \{2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\}$

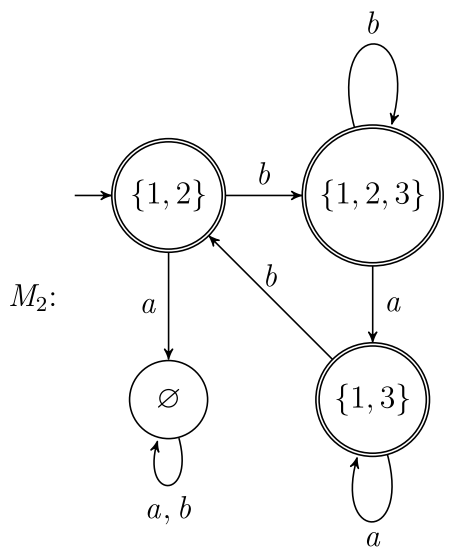
$\delta_2'(\{1,2,3\}, a) = \delta_2(1,a) \cup \delta_2(2,a) \cup \delta_2(3,a) = \varnothing \cup \varnothing \cup \{1,3\} = \{1,3\}$
$\delta_2'(\{1,2,3\}, b) = \delta_2(1,b) \cup \delta_2(2,b) \cup \delta_2(3,b) = \{2\} \cup \{1,3\} \cup \{1\} = \{1,2,3\}$

$\delta_2'(\{1,3\}, a) = \delta_2(1,a) \cup \delta_2(3,a) = \varnothing \cup \{1,3\} = \{1,3\}$
$\delta_2'(\{1,3\}, b) = \delta_2(1,b) \cup \delta_2(3,b) = \{2\} \cup \{1\} = \{1,2\}$

$\delta_2'(\varnothing, a) = \varnothing$
$\delta_2'(\varnothing, b) = \varnothing$

Für M_2 ergibt sich $F = \{\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ (alle Teilmengen von $\{1,2,3\}$, die 2 oder 3 enthalten).

Vom Startzustand aus erreichbar sind davon die Zustände $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ und $\{1,2,3\}$.



Aufgabe 4. Anna, Bibi und Otto stehen im Treppenhaus des Hölderlingebäudes und laufen gemeinsam die Treppen hoch und runter. Jedes Mal, wenn sie eine Stufe hinaufsteigen, notieren sie sich ein $\uparrow$. Jedes Mal, wenn sie eine Stufe hinuntersteigen, notieren sie sich ein $\downarrow$. Geben Sie eine Grammatik an, die die Sprache aller Wörter über $\{\uparrow, \downarrow\}$ erzeugt, so dass die drei Freunde am Ende wieder an der Anfangsposition stehen. Sie dürfen dabei davon ausgehen, dass sie beliebig viele Stockwerke hinauf und hinab gehen können.

Lösung zu Aufgabe 4.
Damit Anna, Bibi und Otto am Ende wieder an der Anfangsposition stehen, muss die Anzahl der $\uparrow$ im Wort gleich der Anzahl der $\downarrow$ sein.

Eine mögliche Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit unendlich vielen Stockwerken ist definiert durch

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow\}$
- $P = \{S \to\ \uparrow S \downarrow S,\ S \to\ \downarrow S \uparrow S,\ S \to \varepsilon\}$.

Es muss nicht bewiesen werden, dass G die Sprache aus der Aufgabenstellung auch wirklich erzeugt.