

## Übungsblatt 6

**Aufgabe 1.** Wiederholen Sie noch einmal den Begriff *Homomorphismus* von Blatt 4. Ein Homomorphismus zwischen den Alphabeten  $\Sigma$  und  $\Gamma$  ist eine Abbildung  $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ , welche jedem Alphabetsymbol  $a \in \Sigma$  einen String über  $\Gamma$  zuweist und sich wie folgt auf beliebige Wörter über  $\Sigma$  erweitert: Sei  $w = a_1 \cdots a_n$ , dann ist  $h(w) = h(a_1) \cdots h(a_n)$ .

- (a) Zeigen Sie, falls  $L$  eine reguläre Sprache über  $\Sigma$  und  $h$  ein Homomorphismus zwischen  $\Sigma$  und  $\Gamma$  ist, dann ist  $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$  wieder regulär (über  $\Gamma$ ).

Seien nun  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  und  $\Sigma = \{a, b\}$ . Wir wissen, dass  $L$  nicht regulär ist. Benutzen Sie die Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, um zu zeigen, dass folgende Sprachen ebenfalls nicht regulär sind.

- (b)  $L_b = \{a^m b^n \mid m, n \geq 0, m \neq n\} \cup L((a|b)^* ba(a|b)^*)$   
(c)  $L_c = \{b^n a^n \mid n \geq 0\}$   
(d)  $L_d = \{w \in \Sigma^* \mid \text{Die Anzahl der Zeichen } a \text{ und } b \text{ in } w \text{ sind gleich.}\}$

**Aufgabe 2.** Seien  $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ . Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- (a) Sei  $A \cap B = C$ . Wenn  $A$  und  $C$  regulär sind, dann ist  $B$  regulär.  
(b) Sei  $A \cup B = C$ . Wenn  $A$  und  $C$  regulär sind, dann ist  $B$  regulär.  
(c) Sei  $A \cdot B = C$ . Wenn  $A$  und  $C$  regulär sind, dann ist  $B$  regulär.  
(d) Sei  $h$  ein Homomorphismus auf  $\Sigma$  und gelte  $h(A) = B$ . Wenn  $B$  regulär ist, dann ist  $A$  regulär.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

- (a)  $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$   
(b)  $\{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

**Aufgabe 4.** Bekanntermaßen ist die Sprache

$$L = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

regulär. Im Folgenden wird versucht zu beweisen, dass sie dies nicht ist. Finden Sie den Fehler.

*Beweis:* Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Wähle  $x = a^{2n}$ . Dann ist  $x \in L$  und  $|x| = 2n \geq n$ . Betrachten wir alle Zerlegungen  $x = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $v \neq \varepsilon$ , so ist  $uv = a^l$  für ein  $l$  mit  $1 \leq l \leq n$  und damit  $v = a^k$  mit  $1 \leq k \leq l$ . Damit ist  $uv^2w = a^{2n+k} \neq a^{2n}$  und somit  $uv^2w \notin L$ . Somit ist  $L$  nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen nicht regulär.

**Aufgabe 5.** Prüfen Sie für jede der folgenden binären Relationen, welche der Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* erfüllt sind. Handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

- (a) “ $\leq$ ” auf  $\Sigma^*$  mit  $v \leq w$  genau dann, wenn es  $u, x \in \Sigma^*$  gibt mit  $uvx = w$ .
- (b) “ $<$ ” auf  $\Sigma^*$  mit  $v < w$  genau dann, wenn  $|v| < |w|$ .
- (c)  $R_n \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$  für ein  $n \geq 2$  mit  $v R_n w$  genau dann, wenn die Anzahl der  $a$ 's in  $v$  und die Anzahl der  $a$ 's in  $w$  den gleichen Rest bei Division durch  $n$  liefern.
- (d)  $R \subseteq (\Sigma^*)^{10} \times (\Sigma^*)^{10}$  mit  $(v_1, \dots, v_{10}) R (w_1, \dots, w_{10})$  genau dann, wenn  $v_i R_i w_i$  ( $1 \leq i \leq 10$ ), wobei alle  $R_i$  Äquivalenzrelationen sind.
- (e)  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $x R y$  genau dann, wenn  $x|y$ .
- (f)  $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit  $R = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$
- (g)  $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit  $R = \{(x, y) \mid xy \leq 0\}$
- (h)  $R \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  mit  $R = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$
- (i) Kann es eine Relation geben, die nicht reflexiv, aber symmetrisch und transitiv ist?