

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Wiederholen Sie noch einmal den Begriff *Homomorphismus* von Blatt 4. Ein Homomorphismus zwischen den Alphabeten Σ und Γ ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, welche jedem Alphabetsymbol $a \in \Sigma$ einen String über Γ zuweist und sich wie folgt auf beliebige Wörter über Σ erweitert: Sei $w = a_1 \cdots a_n$, dann ist $h(w) = h(a_1) \cdots h(a_n)$.

- (a) Zeigen Sie, falls L eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus zwischen Σ und Γ ist, dann ist $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$ wieder regulär (über Γ).

Seien nun $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Wir wissen, dass L nicht regulär ist. Benutzen Sie die Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, um zu zeigen, dass folgende Sprachen ebenfalls nicht regulär sind.

- (b) $L_b = \{a^m b^n \mid m, n \geq 0, m \neq n\} \cup L((a|b)^* ba(a|b)^*)$
(c) $L_c = \{b^n a^n \mid n \geq 0\}$
(d) $L_d = \{w \in \Sigma^* \mid \text{Die Anzahl der Zeichen } a \text{ und } b \text{ in } w \text{ sind gleich.}\}$

Lösung zu Aufgabe 1.

- (a) Da L regulär ist, gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$. Wir können die Abbildung h auf α anwenden, also insbesondere auf jedes Alphabetsymbol in α . Damit ergibt sich ein regulärer Ausdruck $h(\alpha)$ (dies ist nicht definiert worden, aber als Notation so sinnvoll), wobei $L(h(\alpha)) = h(L)$. Die Gleichheit müsste eigentlich noch gezeigt werden, ist aber relativ offensichtlich.

Alternativ kann man auch h auf die endlichen Automaten anwenden (Beweis: Siehe Advanced Logic) oder auf die Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen. Man erhält auf diese Art und Weise für $h(L)$ höchstens so viele Äquivalenzklassen wie für L (Beweis: Übungsaufgabe).

- (b) Der erste Teil von L_b vereinigt mit L ergibt genau alle Wörter über Σ , die nicht das Teilwort ba enthalten. Somit gilt genau $L = \Sigma^* \setminus L_b$. Wegen des Abschlusses regulärer Sprachen bei Differenz- bzw. Komplementbildung ist L_b also nicht regulär (sonst wäre auch L regulär).

- (c) Sei $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ definiert durch $h(a) = b$ und $h(b) = a$. Es gilt $h(L_c) = L$. Die Abbildung erfüllt offenbar $h(w w') = h(w)h(w')$ für alle $w, w' \in \Sigma^*$ und ist somit ein Homomorphismus (h ist sogar nur eine Umbenennung der Zeichen, also ein Isomorphismus). Wäre L_c regulär, so müsste wegen Teilaufgabe (a) auch L regulär sein. Widerspruch. Alternativ: $L_c = L^R$.
- (d) Sei $L' = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$. Die Sprache L' ist regulär, da $L' = L(a^* b^*)$. Wäre L_d regulär, so auch $L = L_d \cap L'$ wegen Abgeschlossenheit regulärer Sprachen unter Schnittbildung. Widerspruch.

Aufgabe 2. Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- (a) Sei $A \cap B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.
- (b) Sei $A \cup B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.
- (c) Sei $A \cdot B = C$. Wenn A und C regulär sind, dann ist B regulär.
- (d) Sei h ein Homomorphismus auf Σ und gelte $h(A) = B$. Wenn B regulär ist, dann ist A regulär.

Lösung zu Aufgabe 2.

- (a) Falsch: Sei z.B. $\Sigma = \{a, b\}$ mit $A = \{ab\}$, $B = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $C = A \cap B = \{ab\}$. A und C sind regulär, B aber nicht (siehe Vorlesung).
- (b) Falsch: Sei z.B. $\Sigma = \{a, b\}$ mit $A = \Sigma^*$, $B = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $C = A \cup B = \Sigma^*$. A und C sind regulär, B aber nicht.
- (c) Falsch: Sei z.B. $\Sigma = \{a, b\}$ mit $A = \Sigma^*$, $B = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da das leere Wort ε in B enthalten ist, gilt $C = A \cdot B = \Sigma^*$. Somit sind A und C regulär, B aber nicht.
- (d) Falsch: Sei z.B. $\Sigma = \{a, b\}$ mit $A = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $h(a) = h(b) = a$. Dann ist $B = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulär, aber A nicht.

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

- (a) $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$
- (b) $\{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

Lösung zu Aufgabe 3.

- (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{n^2} \in L$, somit $|x| = n^2 \geq n$. Betrachte alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$: Es ist $u = a^j, v = a^k, w = a^l$, wobei $j + k + l = n^2$. Wir wählen den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachten $uv^i w$: Wir haben $uv^2 w = a^j a^{2k} a^l = a^{n^2+k}$. Nun müssen wir zeigen, dass $n^2 + k$ keine Quadratzahl ist und somit $uv^2 w \notin L$. Wir zeigen, dass $n^2 < n^2 + k < (n+1)^2$, d.h. $n^2 + k$ liegt zwischen der Quadratzahl n^2 und der nachfolgenden Quadratzahl $(n+1)^2$ und kann damit selbst keine Quadratzahl sein. Es gilt $n^2 < n^2 + k$ wegen $k = |v| \geq 1$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & n^2 + k \\ & \leq n^2 + n && \text{wegen } |uv| \leq n \text{ (und somit } |v| = k \leq n) \\ & < n^2 + 2n + 1 \\ & = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Also gilt $uv^2 w \notin L$ und die Sprache ist folglich nicht regulär.

- (b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^p$ mit einer Primzahl $p \geq n$, somit $|x| \geq n$. Betrachte alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$: Wir haben $u = a^k, v = a^l, w = a^m$ ($k + l + m = p$). Wähle den Pumpfaktor $i = p + 1$ und betrachte $uv^i w$: $uv^{p+1} w = a^k a^{l(p+1)} a^m = a^{k+l(p+1)+m} = a^{k+l+m+l \cdot p} = a^{p+l \cdot p} = a^{(l+1) \cdot p}$. Die Zahl $(l+1) \cdot p$ kann keine Primzahl sein kann, da sie sich in Faktoren $(l+1)$ und p zerlegen lässt, wobei $(l+1) \geq 2$, da nach Voraussetzung $l = |v| \geq 1$. Daher gilt $uv^i w \notin L$ und somit ist L nicht regulär.

Aufgabe 4. Bekanntermaßen ist die Sprache

$$L = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

regulär. Im Folgenden wird versucht zu beweisen, dass sie dies nicht ist. Finden Sie den Fehler.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{2n}$. Dann ist $x \in L$ und $|x| = 2n \geq n$. Betrachten wir alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, so ist $uv = a^l$ für ein l mit $1 \leq l \leq n$ und damit $v = a^k$ mit $1 \leq k \leq l$. Damit ist $uv^2 w = a^{2n+k} \neq a^{2n}$ und somit $uv^2 w \notin L$. Somit ist L nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen nicht regulär.

Lösung zu Aufgabe 4. Die Zahl k aus dem Beweis kann eine gerade Zahl sein. In dem Fall gilt $k = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und somit $uv^2 w = a^{2n+k} = a^{2n+2m} = a^{2(n+m)} \in L$, da $2(n+m)$ wieder eine gerade Zahl ist.

Aufgabe 5. Prüfen Sie für jede der folgenden binären Relationen, welche der Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* erfüllt sind. Handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

- (a) “ $\leq$ ” auf Σ^* mit $v \leq w$ genau dann, wenn es $u, x \in \Sigma^*$ gibt mit $uvx = w$.
- (b) “ $<$ ” auf Σ^* mit $v < w$ genau dann, wenn $|v| < |w|$.
- (c) $R_n \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ für ein $n \geq 2$ mit $v R_n w$ genau dann, wenn die Anzahl der a 's in v und die Anzahl der a 's in w den gleichen Rest bei Division durch n liefern.
- (d) $R \subseteq (\Sigma^*)^{10} \times (\Sigma^*)^{10}$ mit $(v_1, \dots, v_{10}) R (w_1, \dots, w_{10})$ genau dann, wenn $v_i R_i w_i$ ($1 \leq i \leq 10$), wobei alle R_i Äquivalenzrelationen sind.
- (e) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $x R y$ genau dann, wenn $x|y$.
- (f) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $R = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$
- (g) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $R = \{(x, y) \mid xy \leq 0\}$
- (h) $R \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit $R = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$
- (i) Kann es eine Relation geben, die nicht reflexiv, aber symmetrisch und transitiv ist?

Lösung zu Aufgabe 5.

- (a) reflexiv, transitiv, nicht symmetrisch (z.B. $v = a$, $w = ab$)
- (b) nicht reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv
- (c) R_n ist eine Äquivalenzrelation (vgl. DFA „Zähler modulo n “)
- (d) R ist eine Äquivalenzrelation (Eigenschaften gelten komponentenweise)
- (e) reflexiv, transitiv, nicht symmetrisch (z.B. $x = 3$, $y = 6$)
- (f) R ist reflexiv und symmetrisch ($x^2 \geq 0$, $xy \geq 0$ gdw. $yx \geq 0$), aber nicht transitiv ($x > 0$, $y = 0$, $z < 0$)
- (g) nicht reflexiv ($x \neq 0$), symmetrisch (Kommutativität von $\cdot$), nicht transitiv (wie (f), z.B. $x > 0$, $y = 0$, $z > 0$)
- (h) R ist eine ÄR (wie (f), aber R ist auch transitiv: Aus $xy \geq 0$ und $yz \geq 0$ folgt, dass entweder $x, y, z > 0$ oder $x, y, z < 0$ ist, also gilt $xz > 0$)
- (i) Ja, zum Beispiel $R = \emptyset$. Andere Beispiele: Solange es ein x gibt mit $(x, y) \notin R$ für jedes y , ist die Reflexivität nicht erfüllt und man kann dennoch die Symmetrie und Transitivität gewährleisten (z.B. $R = (A \setminus \{x\}) \times (A \setminus \{x\})$, $x \in A$)