

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Im folgenden sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ eine reguläre Sprache und sei $[w]$ die Myhill-Nerode Äquivalenzklasse von $w \in \Sigma^*$ bezüglich der Myhill-Nerode Äquivalenz R_L . Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- (a) Wenn $[\varepsilon] \cap L = \emptyset$, dann ist der Startzustand in einem DFA zu L kein Endzustand.
- (b) Wenn $[a] \cap L = \emptyset$ und $[b] \cap L = \emptyset$, dann gilt $L = \emptyset$.
- (c) Jede kontextfreie Sprache hat unendlich viele Myhill-Nerode Äquivalenzklassen.
- (d) Jede Sprache besitzt mindestens zwei Myhill-Nerode Äquivalenzklassen.

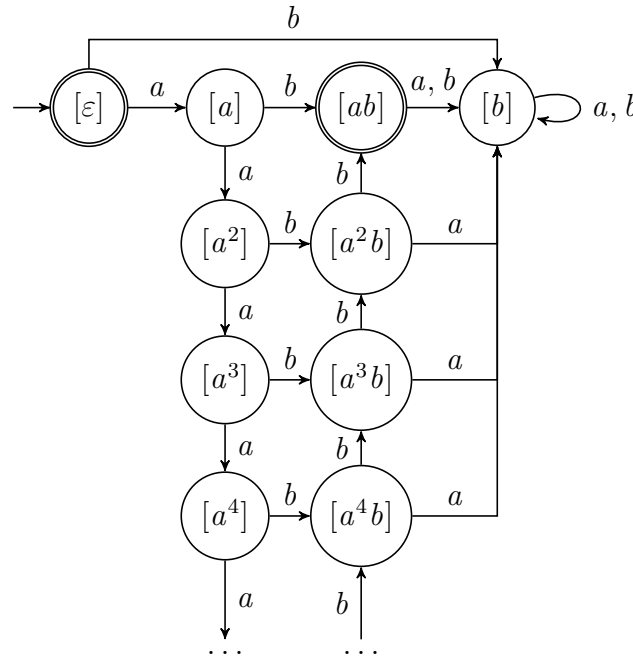
Lösung zu Aufgabe 1.

- (a) Wahr: Es gilt $\varepsilon \in [\varepsilon]$. Da $[\varepsilon] \cap L = \emptyset$ gilt also $\varepsilon \notin L$. Ein DFA zu L darf also das leere Wort nicht akzeptieren, also ist der Startzustand kein Endzustand.
- (b) Falsch: Sei $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 2\}$. Dann ist $[a] = [b] = \{a, b\}$ und es gilt $[a] \cap L = \emptyset$ und $[b] \cap L = \emptyset$. Allerdings ist $L \neq \emptyset$.
- (c) Falsch: Jede reguläre Sprache ist insbesondere auch kontextfrei. Nach dem Satz von Myhill-Nerode erzeugt eine reguläre Sprache jedoch nur endlich viele Myhill-Nerode Äquivalenzklassen.
- (d) Falsch: Zum Beispiel die Sprache Σ^* erzeugt nur eine Myhill-Nerode Äquivalenzklasse. Weiteres Beispiel: $\emptyset$

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Wie sehen die Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen bezüglich L aus?

Lösung zu Aufgabe 2. Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen

- $[b] = \Sigma^* \setminus \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$
Diese Äquivalenzklasse enthält alle Wörter, die sich nicht zu einem Wort in der Sprache L verlängern lassen. D.h. für jedes Wort $x \in [b]$ gilt, dass für alle $w \in \Sigma^*$ auch $xw \notin L$.
- Für jedes $n \geq 0$ gibt es eine Klasse $[a^n] = \{a^n\}$.
Diese unendlich vielen Äquivalenzklassen (eine für jedes $n \geq 0$) enthalten jeweils nur ein Wort (a^n). Für $x = a^n$ gilt, dass $xw \in L$ genau dann wenn $w \in \{a^m b^{m+n} \mid m \geq 0\}$.
- Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Klasse $[a^n b] = \{a^{n+m} b^{m+1} \mid m \geq 0\}$.
Diese unendlich vielen Äquivalenzklassen (eine für jedes $n \geq 1$) enthalten jeweils unendlich viele Wörter. Für jedes Wort $x \in [a^n b]$ gilt, dass $xw \in L$ genau dann wenn $w = b^{n-1}$.



Eine etwas intuitivere Vorstellung über die Äquivalenzklassen erhält man möglicherweise durch den Versuch einen minimalen (unendlichen) deterministischen Automaten für L zu kreieren (siehe Bild oben).

Mit Hilfe der oben aufgelisteten Beschreibungen lässt sich leicht zeigen, dass alle aufgezählten Klassen wirklich von der Myhill-Nerode-Äquivalenz getrennt werden. Betrachten wir zum Beispiel eine Klasse $[a^n]$ und eine Klasse

$[a^m]$ mit $n \neq m$. Dann ist $a^n b^n \in L$ während $a^m b^n \notin L$, woraus direkt folgt dass a^n und a^m nicht in der gleichen Äquivalenzklasse liegen. Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Klasse $[a^n]$ und eine Klasse $[a^m b]$ für beliebige $n \geq 0$ und $m \geq 1$. Wir haben $a^n a b^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1} \in L$ während $a^m b a b^{n+1} \notin L$ und somit folgt auch hier dass beide Wörter nicht äquivalent sind. Analog lässt sich zeigen, dass die verbleibenden Paare von Klassen jeweils getrennt werden können.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen die Anzahl der Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen. Falls die Sprache regulär ist, geben Sie zusätzlich einen minimalen DFA an, der die Sprache erkennt. Falls die Sprache nicht regulär ist, beweisen Sie dies zusätzlich mit Hilfe des Pumping-Lemmas.

- (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^r\}$
- (b) $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- (c) $\{(ab)^n \mid n \geq 2\}$
- (d) $\{a^n b a^m \mid (n + m) \text{ ist gerade}\}$

Lösung zu Aufgabe 3.

(a) **Myhill-Nerode Äquivalenz**

Wir zeigen, dass unendlich viele Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen bzgl. L existieren ($\text{index}(R_L) = \infty$) und L somit nicht regulär ist.

Behauptung: Für alle $n, m \geq 0$ mit $n \neq m$ gilt $\neg(a^n b R_L a^m b)$ und folglich $[a^n b] \neq [a^m b]$.

Die Behauptung gilt, da $a^n b a^n \in L$ während $a^m b a^n \notin L$ (wegen $n \neq m$) und somit sind beide Worte nicht Myhill-Nerode äquivalent.

Es folgt, dass $[a^n b]$ für jedes $n \geq 0$ eine eigene Äquivalenzklasse ist. Folglich gilt $\text{index}(R_L) = \infty$.

$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^r\}$ ist also **nicht regulär**.

Pumping-Lemma

Wir folgen dem „Kochrezept“ für das Pumping-Lemma:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^n b a^n \in L$. Es gilt $|x| = 2n + 1 \geq n$.

Betrachte alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$:

Wir haben $u = a^l, v = a^m, w = a^s b a^n$ ($l + m + s = n$), da $|uv| \leq n$.

Wir wählen den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachten $uv^i w$:

$$uv^2 w = a^l a^{2m} a^s b a^n = a^{l+2m+s} b a^n = a^{(l+m+s)+m} b a^n = a^{n+m} b a^n.$$

Da $m \geq 1$ (wegen $|v| \geq 1$) ist $uv^2 w = a^{n+m} b a^n \neq a^n b a^{n+m}$ und somit $uv^2 w \notin L$. Folglich ist die Sprache nicht regulär.

(b) Myhill-Nerode Äquivalenz

Wir zeigen wieder $\text{index}(R_L) = \infty$.

Behauptung: Für alle $n, m \geq 0$ mit $n \neq m$ gilt $\neg(a^n b R_L a^m b)$ und folglich gilt auch $[a^n b] \neq [a^m b]$.

Die Behauptung gilt, da $a^n b a^n b \in L$ während $a^m b a^n b \notin L$. Beachten Sie, dass bei der Teilung von $a^m b a^n b$ in zwei Worte nur dann gleiche Worte entstehen können wenn $n = m$ gilt, aber hier gilt $n \neq m$.

Es folgt, dass $[a^n b]$ für jedes $n \geq 0$ eine eigene Äquivalenzklasse ist. Folglich gilt $\text{index}(R_L) = \infty$.

$L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ ist also **nicht regulär**.

Pumping-Lemma

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^n b a^n b \in L$, $|x| = 2n + 2 \geq n$.

Betrachte alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$:

Wir haben $u = a^l, v = a^m, w = a^s b a^n b$ ($l + m + s = n$).

Wir wählen den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachten $uv^i w$:

$$uv^2 w = a^l a^{2m} a^s b a^n b = a^{n+m} b a^n b.$$

Da $m \geq 1$ (wegen $|v| \geq 1$) lässt sich $uv^2 w = a^{n+m} b a^n b$ nicht in zwei gleiche Worte zerlegen und somit $uv^2 w \notin L$. Folglich ist die Sprache L nicht regulär.

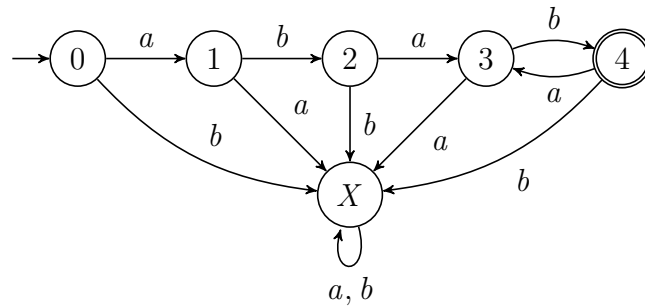
(c) **Myhill-Nerode Äquivalenz**

Die Myhill-Nerode Äquivalenzklassen sind:

- $[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$ (Zustand 0)
- $[a] = \{a\}$ (Zustand 1)
- $[ab] = \{ab\}$ (Zustand 2)
- $[aba] = \{(ab)^n a \mid n \geq 1\}$ (Zustand 3)
- $[abab] = L = \{(ab)^n \mid n \geq 2\}$ (Zustand 4)
- $[b] = \Sigma^* \setminus (L \cup \{\varepsilon, a, ab\} \cup \{(ab)^n a \mid n \geq 1\})$ (Fangzustand X)

$L = \{(ab)^n \mid n \geq 2\}$ ist also **regulär**.

Ein minimaler DFA für L hat 6 Zustände:



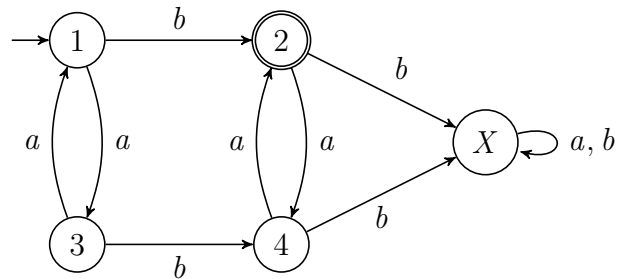
(d) **Myhill-Nerode Äquivalenz**

Die Myhill-Nerode Äquivalenzklassen sind:

- $[\varepsilon] = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Zustand 1)
- $[a] = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Zustand 3)
- $[b] = \{a^n b a^m \mid (n+m) \text{ gerade}\} = L$ (Zustand 2)
- $[ab] = \{a^n b a^m \mid (n+m) \text{ ungerade}\}$ (Zustand 4)
- $[bb] = \Sigma^* \setminus L(a^* \mid a^* b a^*)$ (Fangzustand X)

$L = \{a^n b a^m \mid (n+m) \text{ ist gerade}\}$ ist **regulär**.

Ein minimaler DFA für L hat 5 Zustände:



Aufgabe 4. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit $|Z| = 16$ Zuständen. Kann ein Automat $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0, F)$ existieren, der ein minimaler DFA mit $|Z'| = 76543$ und $L(M) = L(M')$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 4. Durch Potenzmengenkonstruktion erhält man einen DFA M'' mit $L(M) = L(M'')$ mit höchstens $2^{|Z|} = 2^{16} = 65536$ vielen Zuständen. Es gilt $L(M') = L(M) = L(M'')$ und $2^{16} < 76543$, also kann M' kein minimaler DFA sein.