Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Betrachten Sie die folgende Sprache:

$$L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\} \cup \{b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache L nicht regulär ist, indem sie unendlich viele Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen angeben. Alternativ können Sie die Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen benutzen und den Fakt, dass $L' = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ nicht regulär ist.

(b) Beweisen Sie, dass L trotzdem die Eigenschaften des Pumping-Lemmas (Folie 131) erfüllt.

Aufgabe 2. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben ist der DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 1, E)$ mit $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{7\}$ und

δ	a	b
1	2	4
2	7	4
3	5	3
4	5	4
5	7	1
6	7	3
7	7	7

(a) Zeichnen Sie das Automatendiagramm von M.

(b) Verwenden Sie den “Algorithmus Minimalautomat”, um den Minimalautomaten für die Sprache $L(M)$ zu erhalten.

(c) Zeichnen Sie den in (b) erhaltenen Automaten.

Aufgabe 3 (Parikhs Theorem)**.** Sei $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ein Alphabet. Der *Parikh-Vektor* eines Wortes ist definiert als die Funktion $p : \Sigma^* \to \mathbb{N}^k$, gegeben durch

$$p(w) = (\#_{a_1}(w), \#_{a_2}(w), \ldots, \#_{a_k}(w))$$

wobei $\#_{a_i}(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Symbols a_i im Wort w bezeichnet. Eine Teilmenge von $\mathbb{N}^k$ heißt *linear*, wenn sie von der Form

$$u_0 + \mathbb{N}u_1 + \cdots + \mathbb{N}u_m = \{u_0 + t_1u_1 + \cdots + t_mu_m \mid t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{N}\}$$

für gewisse Vektoren $u_0, \ldots, u_m$ ist. Eine Teilmenge von $\mathbb{N}^k$ heißt *semilinear*, wenn sie eine endliche Vereinigung linearer Teilmengen ist.

Satz (Parikh) Sei L eine kontextfreie oder eine reguläre Sprache, und sei $P(L) = \{p(w) \mid w \in L\}$ die Menge der Parikh-Vektoren der Wörter in L (das sogenannte *Parikh-Bild* von L). Dann ist $P(L)$ eine semilineare Menge.
Ist S eine beliebige semilineare Menge, so existiert eine reguläre Sprache (und damit insbesondere auch eine kontextfreie Sprache), dessen Parikh-Bild genau S ist.

(a) Bestimmen Sie die Parikh-Bilder der folgenden Sprachen und geben Sie eine semilineare Darstellung der Menge an!

  (i) $L_1 = \{a^nb^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

  (ii) $L_2 = L((a|b|c)^*aaa(a|b|c)^*)$

  (iii) $L_3 = L(a^*|b^*)$

(b) Beweisen Sie den zweiten Teil des Satzes.

(c) Folgern Sie aus dem Satz von Parikh, dass über unären Alphabeten die Klassen der kontextfreien und regulären Sprachen gleich sind.