Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Formale Sprachen und Automaten
SS 2025

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Wenn L eine Sprache mit $\text{index}(R_L) = \infty$ ist, dann ist L kontextfrei.

(b) Wenn L eine nicht kontextfreie Sprache ist, dann ist $\text{index}(R_L) = \infty$.

(c) Wenn G eine Grammatik in CNF ist, dann ist $L(G)$ kontextfrei und nicht regulär.

(d) Es existieren kontextfreie Sprachen L_1 und L_2 so, dass $L_1 \cap L_2$ auch kontextfrei ist.

(e) Sei L eine Sprache mit $\text{index}(R_L) = \infty$. Dann gilt für jeden Homomorphismus h und jede Sprache L' mit $h(L') = L$, dass L' kontextfrei, aber nicht regulär ist.

(f) Für jedes nicht unäre Alphabet Σ existieren unendlich viele kontextfreie, nicht reguläre Sprachen $L_i \subseteq \Sigma^*$ mit folgender Eigenschaft: Sei $\mathcal{H}$ die Menge aller Homomorphismen $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$. Dann ist $\bigcup_{h \in \mathcal{H}} h(L_i)$ regulär.

Aufgabe 2. Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform über $\Sigma = \{a, b\}$ mit $V = \{S, X, Y, A, B\}$ und den folgenden Produktionen:

$$
\begin{aligned}
P:\ S &\to a \mid b \mid AA \mid BB \mid XA \mid YB \\
X &\to AS \\
Y &\to BS \\
A &\to a \\
B &\to b
\end{aligned}
$$

(a) Überprüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $abbbba \in L(G)$ gilt.

(b) Welche Sprache erzeugt G?

Aufgabe 3. Stellen Sie die folgenden Sprachklassen über dem Alphabet $\{a, b\}$ in einem Venn-Diagramm dar. Geben Sie zusätzlich Beispielsprachen für alle Teilbereiche in ihrem Diagramm an.

- Reguläre Sprachen
- Kontextfreie Sprachen
- Endliche Sprachen
- Unäre Sprachen (alle Sprachen L mit $L \subseteq \{a\}^*$)

Aufgabe 4. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache und h ein Homomorphismus. Der *inverse Homomorphismus* von L ist definiert als

$$h^{-1}(L) = \{w \mid h(w) \in L\}.$$

Seien nun $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ und h definiert via $h(0) = ab$, $h(1) = ba$. Beschreiben Sie $L' = h^{-1}(L) \subseteq \{0, 1\}^*$ und geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L' erzeugt.